Bölüm 2

TEMEL TOPOLOJİ KAVRAMLARI

2.1 AÇIK KÜMELER

2.1.1 PROBLEMLER

1. Bir, iki, üç öğeli kümeler üzerinde kurulabilecek bütün topolojik yapıları kurunuz.

   Çözüm:

   (a) *Bir* öğeli küme $X = \{a\}$ olsun. $\mathscr{T} = \{\emptyset, \{a\}\} = \{\emptyset, X\}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir. Gerçekten, $\mathscr{T}$ ailesi yalnızca iki kümeden oluştuğu için

   T1 $\emptyset \in \mathscr{T}, X \in \mathscr{T}$
   T2 $\emptyset \cap X = \emptyset \in \mathscr{T}$
   T3 $\emptyset \cup X = X$

   yazılabilir. O halde $\mathscr{T}$ ailesi X kümesi üzerinde bir topolojidir. Bir öğeli X kümesi üzerinde başka topoloji yoktur.

   (b) İki öğeli küme $X = \{a, b\}$ olsun. Bu küme üzeride aşağıdaki dört topoloji kurulabilir.

   - $\mathscr{T}_1 = \{\emptyset, \{a, b\}\}$
   - $\mathscr{T}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$
   - $\mathscr{T}_3 = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$
   - $\mathscr{T}_4 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

   (c) Üç öğeli küme $X = \{a, b, c\}$ olsun. Bu küme üzeride aşağıdaki 29 topoloji kurulabilir.

- $\mathscr{T}_1 = \{\emptyset, \{a, b, c\}\}$
- $\mathscr{T}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\mathscr{T}_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}\}$
- $\mathscr{T}_4 = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}\}$
- $\mathscr{T}_5 = \{\emptyset, \{c\}, \{a, b, c\}\}$
- .
- $\mathscr{T}_6 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$
- $\mathscr{T}_7 = \{\emptyset, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\mathscr{T}_8 = \{\emptyset, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- .
- $\mathscr{T}_9 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$
- $\mathscr{T}_{10} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$
- $\mathscr{T}_{11} = \{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$
- .
- $\mathscr{T}_{12} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\mathscr{T}_{13} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\mathscr{T}_{14} = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
- .
- $\mathscr{T}_{15} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\mathscr{T}_{16} = \{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\mathscr{T}_{17} = \{\emptyset, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- .
- $\mathscr{T}_{18} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\mathscr{T}_{19} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\mathscr{T}_{20} = \{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
- .
- $\mathscr{T}_{21} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\mathscr{T}_{22} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\mathscr{T}_{23} = \{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- .
- $\mathscr{T}_{24} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\mathscr{T}_{25} = \{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\mathscr{T}_{26} = \{\emptyset, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
- .
- $\mathscr{T}_{27} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$
- $\mathscr{T}_{28} = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\mathscr{T}_{29} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$

2. Boş olmayan bir X kümesi ile bir $a \in X$ öğesi verilsin. Boş küme ile a öğesini içeren bütün alt kümelerin; yani

$$\mathscr{T} = \{A \subset X : (A = \emptyset) \vee (a \in A)\}$$

ailesinin X kümesi üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

T1 $\emptyset \in \mathscr{T}$ veriliyor. $a \in X$ olduğundan $X \in \mathscr{T}$ çıkar.

T2 $T_1, T_2 \in \mathscr{T}$ ise $a \in T_1$ ve $a \in T_2$ olacağından $a \in T_1 \cap T_2$ olur.

T3 $T_\imath \in \mathscr{T}$, $(\imath \in I)$ ise $a \in T_\imath$, $(\imath \in I)$ olacağından $a \in \cup T_\imath$, $(\imath \in I)$ olur.

3. Her hangi bir X kümesi üzerinde boş küme ile tümleyenleri sayılabilir olan kümeler ailesinin; yani

$$\mathscr{T} = \{A \subset X : (A = \emptyset) \vee (A' \text{ sayılabilir})\}$$

ailesinin bir topoloji olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

T1 $\emptyset \in \mathscr{T}$ veriliyor. $X' = \emptyset$ sayılabilir olduğundan $X \in \mathscr{T}$ çıkar.

T2 $T_1, T_2 \in \mathscr{T}$ ise $T_1^{'}$ ve $T_2^{'}$ sayılabilir olacağından $(T_1 \cap T_2)' = T_1^{'} \cup T_2{}'$ sayılabilir olur. O halde $(T_1 \cap T_2) \in \mathscr{T}$ çıkar.

T3 $T_\imath \in \mathscr{T}, (\imath \in I)$ ise $T_\imath^{'}, (\imath \in I)$ kümeleri sayılabilirdir. Öyleyse $(\cup T_\imath)^{'} = \cap T_\imath^{'}$, $(\imath \in I)$ sayılabilir olur. Buradan $(\cup T_\imath) \in \mathscr{T}$ çıkar.

4. $X = [0, 1) = \{x : 0 \leq x < 1\}$ aralığı üzerinde boş küme ile $[0, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$, biçimindeki yarı-açık aralıklar ailesinin; yani

$$\mathscr{T} = \{\emptyset, \quad [0, \alpha) \, : \, 0 < \alpha \leq 1 \, , \alpha \in \mathbb{R}\}$$

ailesinin bir topoloji olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

T1 $\emptyset \in \mathscr{T}$ veriliyor. $\alpha = 1$ alınınca $X = [0, 1) \in \mathscr{T}$ çıkar.

T2 $A = [0, \alpha) \in \mathscr{T}$ ve $B = [0, \beta) \in \mathscr{T}$ ise $\gamma = min\{\alpha, \beta\}$ olmak üzere $A \cap B = [0, \gamma)$ olacağından $A \cap B \in \mathscr{T}$ çıkar.

T3 $A_\imath = [0, \alpha_\imath) \in \mathscr{T}$, $(\imath \in I)$ ise $\delta = sup\{\alpha_\imath\}$ olmak üzere $\cup A_\imath = [0, \delta) \in \mathscr{T}$ çıkar.

5. (a) $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerinde $\mathbb{R}$, boş küme ve $[\beta, \infty), \beta \in \mathbb{R}$, biçimindeki yarı-açık aralıklardan oluşan ailenin; yani

$$\mathscr{T} = \{A : (A = \mathbb{R}) \vee (A = \emptyset) \vee (A = [\beta, \infty)), \quad \beta \in \mathbb{R}\}$$

ailesinin bir topoloji olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

T1 $\emptyset \in \mathscr{T}$ ve $\mathbb{R} \in \mathscr{T}$ veriliyor.

T2 $A = [\beta_1, \infty) \in \mathscr{T}$ ve $B = [\beta_1, \infty)$ ise $\beta = max\{\beta_1, \beta_2\}$ olmak üzere $A \cap B = [\beta_1, \infty)$ olacağından $A \cap B \in \mathscr{T}$ çıkar. Ayrıca

$$\mathbb{R} \cap [\beta, \infty) = [\beta, \infty) \in \mathscr{T}$$

$$\mathbb{R} \cap \emptyset = \emptyset \in \mathscr{T} \wedge [\beta, \infty) \cap \emptyset = \emptyset \in \mathscr{T}$$

olur.

T3 $A_\imath = [\beta_\imath, \infty) \in \mathscr{T}$, $(\imath \in I)$ ise $\beta = inf\{\beta_\imath\}$ olmak üzere $\cup A_\imath = [\beta, \infty) \in \mathscr{T}$ çıkar.

(b) $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerinde $\mathbb{R}$, boş küme ve $(\beta, \infty), \beta \in \mathbb{R}$, biçimindeki açık aralıklardan oluşan ailenin; yani

$$\mathscr{T} = \{A : (A = \mathbb{R}) \vee (A = \emptyset) \vee (A = (\beta, \infty)), \quad \beta \in \mathbb{R}\}$$

ailesinin bir topoloji olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

T1 $\emptyset \in \mathscr{T}$ ve $\mathbb{R} \in \mathscr{T}$ veriliyor.

T2 $A = (\beta_1, \infty) \in \mathscr{T}$ ve $B = (\beta_1, \infty)$ ise $\beta = max\{\beta_1, \beta_2\}$ olmak üzere $A \cap B = (\beta_1, \infty)$ olacağından $A \cap B \in \mathscr{T}$ çıkar. Ayrıca

$$\mathbb{R} \cap (\beta, \infty) = (\beta, \infty) \in \mathscr{T}$$

$$\mathbb{R} \cap \emptyset = \emptyset \in \mathscr{T} \wedge (\beta, \infty) \cap \emptyset = \emptyset \in \mathscr{T}$$

olur.

T3 $A_\imath = (\beta_\imath, \infty) \in \mathscr{T}$, $(\imath \in I)$ ise $\beta = inf\{\beta_\imath\}$ olmak üzere $\cup A_\imath = (\beta, \infty) \in \mathscr{T}$ çıkar.

6. `Örnek 2.1.3` 'te kurulan $\mathscr{T}_2$ ve $\mathscr{T}_3$ topolojilerinin arakesitinin; yani her iki topolojide de var olan kümelerden oluşan ailenin yeni bir topoloji olduğunu gösteriniz. Karşıt olarak, $\mathscr{T}_2$ ve $\mathscr{T}_3$ topolojilerinin bileşiminin; yani iki topolojiden herhangi birisine veya her ikisine de ait olan bütün kümelerden oluşan ailenin yeni bir topoloji oluşturmadığını gösteriniz. Aşağıdaki problemler bunu genelleştirecektir.

Çözüm:

$$\mathscr{T}_2 \cap \mathscr{T}_3 = \{\emptyset, X, \{b, c\}\}$$

dir. Bu ailenin [T1] - [T3] topoloji aksiyomlarını sağladığı kolayca görülmektedir. Öte yandan

$$\mathscr{T}_2 \cup \mathscr{T}_3 = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

dir. Bu bileşimin topoloji aksiyomlarını sağlamadığını göstermek için bir tane karşı örnek vermek yetecektir. Örneğin,

$$\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\} \notin \mathscr{T}_2 \cup \mathscr{T}_3$$

olduğundan [T2] aksiyomu sağlanmaz. O halde $\mathscr{T}_2 \cup \mathscr{T}_3$ bir topoloji değildir.

7. $\mathscr{T}$ ve $\mathscr{S}$ bir X kümesi üzerinde birer topolojik yapı iseler

$$\mathscr{T} \cap \mathscr{S} = \{H : (H \in \mathscr{T}) \wedge (H \in \mathscr{S})\} \tag{2.1}$$

ailesinin de X üzerinde bir topolojik yapı olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

T1 $\emptyset, X \in \mathscr{T} \cap \mathscr{T}$ olduğu apaçıktır.

T2 $T, S = \in \mathscr{T} \cap \mathscr{S}$ ise $T \cap S \in \mathscr{T} \cap \mathscr{S}$ olur.

T3 $A_\imath \in \mathscr{T} \cap \mathscr{S}$, $(i \in I)$ ise

$$\bigcup_{i \in I} A_\imath \in \mathscr{T}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_\imath \in \mathscr{S}$$

olacağından

$$\bigcup_{i \in I} A_\imath \in \mathscr{T} \cap \mathscr{S}$$

çıkar.

8. $\mathscr{T}$ ve $\mathscr{S}$ bir X kümesi üzerinde birer topolojik yapı iseler

$$\mathscr{T} \cup \mathscr{S} = \{H : (H \in \mathscr{T}) \vee (H \in \mathscr{S})\} \tag{2.2}$$

ailesinin X üzerinde bir topolojik yapı oluşturmayabileceğine örnek gösteriniz.

Çözüm: İki topolojinin bileşiminin bir topoloji olmayabileceğine çok örnek gösterilebilir. Aşağıda iki örnek verilmiştir.

(a) 6.Problemin çözümünde gösterildiği üzere

$$\mathscr{T}_2 \cup \mathscr{T}_3 = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

bileşimi bir topoloji değildir.

(b) $\mathscr{B} = \{[a,b) \,|a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ ailesine ait kümelerin herhangi bir bileşimi olarak yazılabilen kümelerin oluşturduğu aileye $\mathscr{A}$ diyelim. $(\mathbb{R}, \mathscr{A})$ bir topolojik uzaydır. $\mathscr{A}$ topolojisine $\mathbb{R}$ üzerindeki *alt-limit topolojisi* denilir.

Benzer olarak, $\mathscr{E} = \{(c,d] \,|a,b \in \mathbb{R}, c < d\}$ ailesine ait kümelerin herhangi bir bileşimi olarak yazılabilen kümelerin oluşturduğu aileye $\mathscr{U}$ diyelim. $(\mathbb{R}, \mathscr{U})$ bir topolojik uzaydır. $\mathscr{U}$ topolojisine $\mathbb{R}$ üzerindeki *üst-limit topolojisi* denilir.

$\mathscr{A}) \cup \mathscr{U}$ bileşimi, topoloji aksiyomlarını sağlamaz. Dolayısıyla $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji değildir. Böyle olduğunu bir karşı örnekle gösterebiliriz. $[a,b), (c,d] \in \mathscr{A} \cup \mathscr{U}$ dur, ama $[a,b) \cap (c,d] = [a,d] \notin \mathscr{A} \cup \mathscr{U}$ dir. O halde [T2] aksiyomu sağlanmaz.

9. Bir X kümesi üzerindeki kimi topolojilerden oluşan bir $\mathscr{T}_i : i \in I$ topolojik yapılar ailesi verilsin.

$$\mathscr{L} = \bigcap_{i \in I} \mathscr{T}_i = \{T \,:\, (\forall \imath \in I)\, T \in \mathscr{T}_\imath\}$$

arakesitinin X üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz. (İleride bu topolojiye, verilen *topolojilerin en büyük alt sınırı* diyeceğiz.)

Çözüm:

T1 Her $(i \in I)$ için $\emptyset, X \in \mathscr{T}_\imath$ olduğundan $\emptyset, X \in \mathscr{L}$ olur.

T2 $T, S =\in \mathscr{L}$ ise her $(i \in I)$ için

$$T, S \in \mathscr{T}_\imath \Rightarrow T \cap S \in \mathscr{T}_\imath \Rightarrow T \cap S \in \mathscr{L}$$

olur.

T3 Her $(\jmath \in J)$ için $A_\jmath \in \mathscr{L}$ ise her $(\jmath \in J)$ ve her $(\imath \in I)$ için $A_\jmath \in \mathscr{T}_\imath$ olacaktır. Buradan

$$\begin{aligned} \bigcup_{\jmath \in J} A_\jmath &\in \mathscr{T}_\imath \\ &\in \bigcap_{\imath \in I} \mathscr{T}_\imath \\ &\in \mathscr{L} \end{aligned}$$

çıkar.

10. `Tanım 2.1.1` ile verilen [Tl] aksiyomunun [T2] ile [T3] aksiyomlarından bağımsız olmadığını; yani ilk aksiyomun son ikisinden çıkarılabileceğini gösteriniz. (Yol gösterme: Boş ailenin arakesiti evrensel kümedir, bileşimi ise boş kümedir. (Bkz. [**?**].)

Çözüm: $(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay olsun. Boş ailenin arakesiti evrensel küme, boş ailenin bileşimi boş küme olduğundan

$$\bigcup_{i \in \emptyset} T_i = \emptyset$$

yazabiliriz. O halde, [T3] aksiyomu gereğince $\emptyset \in \mathscr{T}$ olur. Benzer düşünüşle

$$\bigcap_{i \in \emptyset} T_i = X$$

yazılabilir, ki bu $X \in \mathscr{T}$ olması demektir.