17.13 Ek Problemler

1. (x_n) bir Cauchy dizisi ve (x_{i_n}) bir alt dizisi ise

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_{i_n}) = 0 \tag{17.25}$$

Çözüm: $E_n = \{x_k : k \geq n\}$ diyelim. Problem 17.7.1(4) da verilen (17.16) ifadesini anımsayalım: Her $\epsilon > 0$ için öyle bir n_ϵ sayısı vardır ki

$$n > n_\epsilon \Rightarrow \rho(E_n) < \epsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(E_n) = 0 \tag{17.26}$$

olur. Bu demektir ki, asıl dizinin terimleri ile alt dizinin terimleri, indisler yeteri kadar büyütülerek, birbirlerine istenildiği kadar yaklaştırılabilirler. Başka bir deyişle, her $\epsilon > 0$ için öyle bir n_ϵ sayısı vardır ki

$$n, i_n > n_\epsilon \Rightarrow \rho(x_n, x_{i_n}) < \epsilon$$

olur. Limit tanımı uyarınca, buradan, (17.25) çıkarılır.

2. (X, ρ) metrik uzayındaki bir (x_n) Cauchy dizisinin yakınsak bir (x_{i_n}) alt dizisi var ve $x_{i_n} \to a$ ise (x_n) üst dizisi de aynı limite yakınsar.

Çözüm:

Üçgen eşitsizliğinden

$$\rho(x_n, a) \leq \rho(x_n, x_{i_n}) + \rho(x_{i_n}, a)$$

dır. Her iki yanın limitini alırsak,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, a) \leq \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_{i_n}) + \lim_{n\to\infty} \rho(x_{i_n}, a) \tag{17.27}$$

yazılabilir. $x_{i_n} \to a$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \rho(x_{i_n}, a) = 0$ dır. Ayrıca, (17.25) uyarınca $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_{i_n}) = 0$ olur. Bu ikisini (17.27) ye taşırsak

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a \tag{17.28}$$

elde edilir.

3. Aşağıdaki kümelerin hiç bir yerde yoğon olmadığını (seyrek) olduğunu gösteriniz.

   (a) Sonlu küme.
   (b) Gerçel sayılarda yakınsak bir dizinin terimlerinden oluşan küme.
   (c) Doğal sayılar kümesi.
   (d) Tam sayılar kümesi.
   (e) Açık ve yoğun bir kümenin tümleyeni.

4. Rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ içinde seyrek değildir (her yerde yoğundur). Gösteriniz.

5. Seyrek olmayan bir kümenin her alt kümesi de seyrek değildir.

6. A ve B kümeleri seyrek ise $A \cup B$ bileşimi de seyrektir.

   Çözüm: Bir A kümesinin seyrek olması için gerekli ve yeterli koşul, her açık T kümesinin A ile kesişmeyen bir açık altkümesinin var olmasıdır.

   A ile B seyrek iki küme olsun. A seyrek olduğundan, her T açık kümesinin A ile kesişmeyen bir U açık alt kümesi vardır: $U \subset T$ ve $U \cap A = \emptyset$.

   B seyrek olduğundan, yukarıda varlığı söylenen U açık kümesinin B ile kesişmeyen bir V açık alt kümesi vardır: $V \subset U$ ve $V \cap A = \emptyset$.

   Bu iki bağıntıdan $V \cap A = \emptyset$ çıkar. Her açık T kümesi için böyle bir $V \subset T$ açık kümesi var olduğuna göre $A \cup B$ bileşimi seyrek bir kümedir.

   Sonlu tüme varım yöntemiyle, sonlu sayıda seyrek kümelerin bileşiminin de seyrek olduğunu söyleyebiliriz.

7. Sonlu sayıda seyrek kümenin bileşimi de seyrektir.

8. Seyrek kümelerin sayılabilir sayıdasının bileşiminin seyrek olmayabileceğini bir örnekle gösteriniz.

9. Seyrek kümenin tümleyeni her yerde yoğundur. Gösteriniz. Tümleyeni seyrek olmayan her yerde yoğun bir küme gösteriniz.

10. $\mathbb{R}$ içinde bir A kümesinin seyrek olması için gerekli ve yeterli koşul hiç bir aralık kapsamamasıdır.