17.7 LİMİTLER ve CAUCHY DİZİLERİ

17.7.1 Problemler

1. Gerçel ya da karmaşık sayılardan oluşan bir (x_n) dizisinin, salt topolojiye göre, bir x limitine yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul, her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \epsilon \tag{17.11}$$

olacak biçimde yalnız ϵ 'a bağlı doğal bir n_0 sayısının var olmasıdır. Gösteriniz.

Çözüm: Salt topolojide metrik mutlak değerdir. Buna göre, Tanım 11.1.2 ve Teorem 17.7.1 ifadeleri (17.11) ifadesine denktir.

2. Bir metrik uzayda yakınsak her dizi sınırlıdır. Gösteriniz.

Çözüm: (X, ρ) metrik uzayında yakınsak bir (x_n) dizisi verilsin. Teorem 17.7.1 uyarınca $x_n \to x$ ise her $\epsilon > 0$ için

$$n \geq n_0 \Rightarrow \rho(x_n - x) < \epsilon \tag{17.12}$$

sağlanır. Öyleyse $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B_\rho(x, \epsilon)$ olur. Bu, $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ terimlerinin x merkezli ϵ yarıçaplı yuvar içinde kaldığı anlamına gelir. O halde bu küme sınırlıdır. Geriye kalan $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}\}$ kümesi sonludur. Metrik uzaydaki her sonlu küme sonırlıdır. Sınırlı iki kümenin bileşimi de sınırlı olduğundan (x_n) dizisi sınırlı bir kümedir.

3. *Alt uzayda yakınsak dizi üst uzayda da yakınsar. Neden? Bu önermenin tersi doğru mudur?*

Çözüm: (X, ρ) metrik uzayında bir A alt uzayı verilsin. $(x_n) \subset A$ ve $x_n \to x$ olsun. (17.12) ifadesi A içinde sağlanıyorsa, X içinde de sağlanacaktır.

Bu özelik metrel olmayan topolojik uzaylar için de geçerlidir. $(X, \mathscr{T})$ uzayının bir $(A, \mathscr{T}_A)$ alt uzayında yakınsak bir $(x_n) \subset A$ dizisi düşünelim. $x_n \to x$ olsun. $(A, \mathscr{T}_A)$ alt uzayında x noktasının bir yerel tabanı $\mathscr{B}(x)$ ise her $B \in \mathscr{B}(x)$ için öyle bir n_B sayısı vardır ki

$$n \geq n_B \Rightarrow x_n \in B \tag{17.13}$$

olur. Öte yandan alt uzaydaki açık kümeler üst uzaydaki açık kümelerin A ile arakesitlerinden oluşur. Başka bir deyişle, $\mathscr{B}(x)$ yerel tabanı üst uzaydaki bir $\mathscr{W}(x)$ yerel tabanının A ile arakesitlerinden ibarettir. Öyleyse, her $B \in \mathscr{B}(x)$ için $B = A \cap W$ olacak biçimde bir $W \in \mathscr{W}(x)$ vardır. O halde (17.13) ifadesi

$$n \geq n_B \Rightarrow x_n \in W \tag{17.14}$$

olmasını gerektirir. Her $W \in \mathscr{W}(x)$ için bu yapılabileceğinden (x_n) dizisi üst uzayda da yakınsar.

4. Bir (X, ρ) metrik uzayı içindeki (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olması için gerekli ve yeterli koşul $E_n = \{x_k : k \geq n\}$ olmak üzere $\rho(E_n) \to 0$ olmasıdır. İspatlayınız.

   GEREKLİĞİ:

   (x_n) bir Cauchy dizisi olsun. Her $\epsilon > 0$ için öyle bir n_ϵ sayısı vardır ki

$$n \geq n_\epsilon \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \epsilon \tag{17.15}$$

   olur. Buradan

$$n > n_\epsilon \Rightarrow \rho(E_n) < \epsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(E_n) = 0 \tag{17.16}$$

   çıkar.

   YETERLİĞİ:

   $\lim_{n\to\infty}(E_n) = 0$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için öyle bir n_ϵ sayısı vardır ki

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(E_n) = 0 &\Rightarrow [n > n_\epsilon \Rightarrow \rho(E_n) < \epsilon] \\ &\Rightarrow [m, n > n_\epsilon \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \epsilon] \\ &\Rightarrow (x_n) \quad \text{bir Cauchy dizisidir.}\end{aligned}$$

   olur.

5. *Bir Cauchy dizisinin her hangi bir alt dizisinin de bir Cauchy dizisi olacağını gösteriniz.*

   ÇÖZÜM:

   (x_n) bir Cauchy dizisi ve (x_{i_n}) bir alt dizisi olsun. Önceki problem uyarınca, $\lim_{n\to\infty}(E_n) = 0$ dır. Bu demektir ki, asıl dizinin terimleri ile alt dizinin terimleri, indisler yeteri kadar büyütülerek, birbirlerine istenildiği kadar yaklaştırılabilirler. Başka bir deyişle, her $\epsilon > 0$ için öyle bir n_ϵ sayısı vardır ki

$$n, i_n > n_\epsilon \Rightarrow \rho(x_n, x_{i_n}) < \epsilon$$

   olur. Aynı düşünüşle,

$$i_m, i_n > n_\epsilon \Rightarrow \rho(x_{i_m}, x_{i_n}) < \epsilon$$

   olacaktır. Öyleyse (x_{i_n}) alt dizisi de bir Cauchy dizisidir.

6. (X, ρ) bir metrik uzay ve $\sigma(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$ olsun. X içindeki bir (x_n) dizisinin ρ metriğine göre bir Cauchy dizisi olması için gerekli ve yeterli koşul σ metriğine göre bir Cauchy dizisi olmasıdır. Gösteriniz.

   ÇÖZÜM:

   (x_n) ρ metriğine göre bir Cauchy dizisi ise, her $\epsilon > 0$ için öyle bir n_ϵ sayısı vardır ki

$$m, n > n_\epsilon \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \epsilon$$

dir. Buradan $\epsilon < 1$ alarak

$$m, n > n_\epsilon \Rightarrow \min\{1, \rho(x_m, x_n)\} < \epsilon \Leftrightarrow \sigma(x_m, x_n) < \epsilon$$

çıkar.

7. *Bir Cauchy dizisinin düzgün sürekli bir fonksiyon altındaki resminin de bir Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.*

   ÇÖZÜM:

   $f : (X, \rho) \to (Y, \mu)$ düzgün sürekli ve $(x_n) \subset X$ bir Cauchy dizisi olsun. Düzgün süreklilik gereğince, her $\epsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki

   $$\rho(x, y) < \delta \Rightarrow \mu(f(x), f(y)) < \epsilon$$

   olur. Buradan, özel olarak,

   $$\rho(x_m, x_n) < \delta \Rightarrow \mu(f(x_m), f(x_n)) < \epsilon$$

   yazılabilir. $(x_n) \subset X$ bir Cauchy dizisi olduğundan, varlığı yukarıda söylenen $\delta > 0$ sayısına karşılık öyle bir n_ϵ sayısı vardır ki

   $$m, n > n_\epsilon \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \delta$$

   olur. Son iki bağıntıyı birleştirerek şöyle diyebiliriz:

   Her $\epsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ sayısı ve bu δ sayısına karşılık öyle bir n_ϵ sayısı vardır ki

   $$m, n > n_\epsilon \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \delta \Rightarrow \mu(f(x_m), f(x_n)) < \epsilon$$

   çıkar. O halde $(f(x_n)) \subset Y$ bir Cauchy dizisidir.

17.8 TAMLIK

17.8.1 Problemler

1. *Örnek 17.2.1 deki uzayın tam olduğunu gösteriniz.* ÇÖZÜM: Bu uzayın ayrık bir topolojik uzay olduğunu Problem 17.3.1(5) te göstermiştik. Bu uzayda bir (x_n) Cauchy dizisi düşünelim. Örnek 17.2.1 deki δ metriğinin tanımı gereğince, $0 < \epsilon < 1$ için

   $$\delta(x_m, x_n) < \epsilon \Leftrightarrow x_m = x_n$$

   dir. Bunun olabilmesi için, (x_n) Cauchy dizisinin, belli bir yerden sonraki bütün terimlerinin eşit olması gerekir; yani

   $$x_1, x_2, x_3, \ldots, n_{n-1}, x, x, x, \ldots, x, \ldots$$

   olmalıdır. Tabii, bu dizi için $x_n \to x$ dir. O halde bu uzaydaki her Cauchy dizisi yukarıdaki anlamda sabit bir dizidir ve yakınsaktır. Dolayısıyla uzay tamdır.

2. *Sonlu bir metrik uzayın tam olduğunu gösteriniz.*

   ÇÖZÜM: Sonlu bir uzaydaki her dizi

   $$x_1, x_2, x_3, \ldots, n_{n-1}, x, x, x, \ldots, x, \ldots$$

   biçimindedir ve bu dizi için $x_n \to x$ dir. O halde bu uzaydaki her Cauchy dizisi yukarıdaki anlamda sabit bir dizidir ve yakınsaktır. Öyleyse uzay tamdır.

3. *Örnek 17.41 de tanımlanan $\mathfrak{B}(X)$ uzayının tam olduğunu gösteriniz.*

   ÇÖZÜM:

   X üzerinde tanımlı karmaşık ve sınırlı fonksiyonların oluşturduğu $\mathfrak{B}(X)$ uzayı üzerinde

   $$(f, g) \to \rho(f, g) = ||f - g||_\infty = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \tag{17.17}$$

   metriği tanımlanıyor. Uzayın tam olduğunu göstermek için, içindeki her Cauchy dizisinin yakınsadığını göstermeliyiz. $(f_n) \subset \mathfrak{B}(X)$ bir Cauchy dizisi ise, her $\epsilon > 0$ için öyle bir n_ϵ sayısı vardır ki

   $$\begin{aligned} m, n > n_\epsilon &\Rightarrow ||f_m - f_n||_\infty < \epsilon \\ &\Rightarrow \sup_{x \in X} |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \\ &\Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \end{aligned}$$

   olur. Bu demektir ki, her $x \in X$ için

   $$\{f_n(x)\} \subset \mathbb{R}$$

   dizisi $\mathbb{R}$ içinde bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ bir tam metrik uzay olduğundan, her $x \in X$ için

   $$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \in \mathfrak{B}(X)$$

   olur. Buradan

   $$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} ||f_n - f||_\infty = 0$$

   çıkarılır.