17.6 DÜZGÜN SÜREKLİLİK

Düzgün sürekliliğin kitapta verilen formal tanımını yorumlarsak, şöyle diyebiliriz:

Bir metrik uzayda düzgün sürekli fonksiyon, konumlarına bağlı olmaksızın değişken değerleri birbirlerine yakın seçildiğinde fonksiyon değerlerinin de birbirlerine istenildiği kadar yakınlaşabildiği fonksiyon türüdür.

Anımsanacağı üzere sürekli fonksiyon değerlerinin birbirlerine istenildiği kadar yakınlaştırılması için, değişken değerlerinin birbirlerine ne kadar yakın seçileceği, istenen uzaklığa ve değişkenlerin konumuna bağlı olarak değişir. Başka bir deyişle süreklilik yerel (konuma bağlı) bir olgudur, düzgün süreklilik ise yaygın (konuma bağlı olmayan, global) bir olgudur.

Düzgün süreklilik ile ilgili başlıca teoremler:

Teorem 17.6.1. *Tıkız bir küme üzerinde sürekli olan fonksiyon düzgün süreklidir.*

Teorem 17.6.2. *Bir (a, b) aralığında sınırlı türevi olan fonksiyon (a, b) aralığında düzgün süreklidir.*

Teorem 17.6.3. *$f : (X, \rho) \to (Y, \mu)$ düzgün sürekli ve $(x_n) \subset X$ bir Cauchy dizisi ise $f(x_n)) \subset Y$ bir Cauchy dizisidir.*

Örnek 17.6.1. $f(x) = x^2$ diye tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir, ama düzgün sürekli değildir.

İSPAT: Bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. Her $\delta > 0$ sayısı için

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = (x - x_0)^2 = (x - x_0)(x + x_0) < \delta(2x_0 + \delta)$$

olur. Belirli bir x_0 değeri için, örneğin, $\delta < K$ ve $\delta < \frac{\epsilon}{2x_0+K}$ alınırsa $\delta(2x_0+\delta) < \epsilon$ olur. Dolayısıyla, $f(x) = x^2$ fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir. x_0 noktasının yeri değişince seçilecek δ nın değeri x_0 noktasına bağlı olarak değişir.

Öte yandan, bütün $x \in \mathbb{R}$ için $\delta(2x+\delta)$ değerleri için $\delta(2x+\delta) < \epsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir δ sayısı yoktur. x değişkeni sınırsız büyüyebilir ve ona bağlı olarak $\delta(2x+\delta)$ değerleri verilen ϵ sayısından büyük olur. O halde, $f(x) = x^2$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün sürekli değildir. Ama her sonlu aralıkta düzgün süreklidir.

Örnek 17.6.2. $f(x) = \frac{1}{x}$ diye tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(0, 1)$ aralığında süreklidir, ama düzgün sürekli değildir.

İSPAT: Bir $x_0 \in (0, 1)$ verilsin. Salt metriğe göre $\mathbb{R}$ Birinci Sayılabilme Belitini sağlar. Öyleyse, bu uzayda dizisel süreklilik sürekliliği gerektirir (bkz. Teorem 11.2.2 ve Teorem 17.6.1). $x_n \to x_0$ olacak biçimde bir $(x_n) \subset (0, 1)$ dizisi seçelim.

$$x_n \to x_0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x_0}$$

olduğundan f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir. Her $x_0 \in (0, 1)$ için bu özelik var olduğundan, f fonksiyonu $(0, 1)$ aralığında süreklidir.

Her $0 < h < \frac{1}{2}$ sayısı için

$$|f(x+h) - f(x)| = |\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}| = |\frac{h}{x(x+h)}| \tag{17.10}$$

olur. Şimdi $x \to 0$ iken (17.10) nın sağ yanının sınırsız olarak büyüdüğünü görebiliriz. Gerçekten $\frac{h}{2} < x < h$ koşulu altında $h \to 0$ iken

$$|f(x+h) - f(x)| = |\frac{h}{x(x+h)}| \geq |\frac{4}{3h}| \to \infty$$

olur. O halde, $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $(0,1)$ üzerinde düzgün sürekli değildir.

Örnek 17.6.3. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ diye tanımlanan $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(0,1)$ aralığında süreklidir, ama düzgün sürekli değildir.

İSPAT: Önce, her hangi bir $x_0 \in (0,\infty)$ noktasında f nin sürekli olduğunu gösterelim. Bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin.

$$|f(x) - f(x_0)| = |\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2}| = \frac{x_0^2 - x^2}{x^2 x_0^2} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x^2 x_0^2}$$

olur. Eğer $|x - x_0| < \frac{x_0}{2}$ ise $\frac{x_0}{2} < |x| < \frac{3x_0}{2}$ olur. Buradan $|x + x_0| < \frac{5x_0}{2}$ çıkar. Bunu yukarıdaki ifadede kullanırsak

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{|x - x_0|.\frac{5x_0}{2}}{(\frac{x_0}{2})^2.x_0^2} = \frac{10.|x - x_0|}{x_0^3}$$

çıkar. Şimdi $\delta = (\min\{\frac{x_0}{2}, \frac{x_0^3}{10})\epsilon$ olarak seçilirse, yukarıdaki eşitsizlikten

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

elde edilir. Demekk ki f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

Şimdi x ile x_0 arasındaki uzaklığın δ olduğu varsayımı ile $x = x_0 \pm \delta$ konumunu yaparsak, yukarıdaki eşitsizlik

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{|x - x_0|.\frac{5x_0}{2}}{(\frac{x_0}{2})^2.x_0^2} = \frac{10.\delta}{x^3}$$

yazılabilir. δ ne olursa olsun, $x \to 0$ iken sağdaki son terim sınırsız olarak büyür. Dolayısıyla düzgün süreklilik koşulu sağlanmaz.

17.6.1 Problemler

1. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri $(0,1)$ aralığı üzerinde düzgün süreklidir?

   (a) $f(x) = x$

(b) $f(x) = x^3$

(c) $f(x) = \sin x$

(d) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

(e) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

(f) $f(x) = \frac{1}{2-x}$

ÇÖZÜM:

Teorem 17.6.2 uyarınca $(a), (b), (c), (f)$ fonksiyonları düzgün süreklidir. (d) ve (e) düzgün sürekli değildir. Bunların ispatı yukarıdaki örneklerde izlenen yöntemle gösterilebilir.

2. Düzgün sürekli her fonksiyonun sürekli olduğunu gösteriniz.

   ÇÖZÜM: Düzgün süreklilik tanımının süreklilik tanımını gerektirdiği açıktır.

3. Düzgün sürekli iki fonksiyonun bileşkesinin de düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

   Sürekli iki fonksiyonun bileşkesinin sürekli oluşunun ispatına benzer yöntemle istenen özelik kolayca görülebilir.

4. Sürekli olmayan bir fonksiyonun bir alt-uzaya kısıtlanmışı sürekli olabilir. Örneğin, $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \quad \text{rasyonel} \\ 1, & x \quad \text{irrasyonel} \end{cases}$$

   diye tanımlanan *Dirichlet fonksiyonu* sürekli değildir. Ama bunun $\mathbf{Q}$ rasyonel sayılar kümesine kısıtlaması süreklidir. Neden?

ÇÖZÜM: *Dirichlet fonksiyonu*'nun rasyonel sayılar kümesine kısıtlanmışı 0 sabit fonksiyonudur. Sabir her fonksiyon süreklidir.