17.4 EŞMETREL UZAYLAR

17.4.1 Problemler

1. $\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, \mathfrak{s}_n$ metrikleri sırasıyla (17.28), (17.29) ve (17.30) bağıntıları ile tanımlı metrikler olmak üzere $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{p}), (\mathbb{R}^n, \mathfrak{m}), (\mathbb{R}^n, \mathfrak{s}_n)$ uzayları eşmetrik değildirler, ama metrikler denktir. Gösteriniz.

   ÇÖZÜM:

   Örneğin, $n = 2$, $x = (0,0)$ $y = (1,1)$ alınırsa $\mathfrak{p}(x,y) = 2$, $\mathfrak{m}(x,y) = 1$, $\mathfrak{s}_n(x,y) = \sqrt{2}$ olur. Demek ki bu üç metrik eşmetrel (isometric) değildir. Öte yandan, her $r > 0$ için

   $$B_{\mathfrak{p}}(x,r) \subset B_{\mathfrak{s}_n}(x,r) \subset B_{\mathfrak{m}}(x,r)$$

   olduğu hemen tanımdan görülüyor. Karşıt olarak,

   $$B_{\mathfrak{m}}(x,r) \subset B_{\mathfrak{s}_n}(x,\sqrt{2}r) \subset B_{\mathfrak{p}}(x,2r)$$

   dir. (Bkz. Önerme 17.3.3).

2. Boş olmayan bir X kümesi üzerinde

   $$\delta(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

   $$\sigma(x,y) = \begin{cases} 2, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

   metrikleri verilsin. $x \neq y$ için $\delta(x,y) = 1$ ve $\sigma(x,y) = 2$ olduğundan (X,δ) uzayı ile (X,σ) uzayı eşmetrik eşyapılı değildirler. Ama topolojik eşyapılıdırlar. Çünkü δ ve σ metriklerinin her ikisi de X üzerine *ayrık topolojiyi* koyar.

   ÇÖZÜM: Eşmetrel olmadıkları gerçeği zaten problemde açıklanmıştır. Problem 17.3.1(5) 'de $\mathscr{T}_\delta$ nın ayrık topoloji olduğu gösterildi. Tamamen aynı yöntemle $\mathscr{T}_\sigma$ nın da ayrık topoloji olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla $\mathscr{T}_\delta = \mathscr{T}_\delta$ dır. O halde δ ve σ metrikleri birbirlerine denktirler.

17.5 SINIRLILIK

17.5.1 Problemler

1. $\mathbb{R}^2$ üzerindeki Öklit metriğine göre $xy = 1$ hiperbolü ile $y = 0$ doğrusu kesişmeyen kapalı iki alt kümedir. Her iki küme sınırsızdır ve aralarındaki uzaklık sıfıra eşittir. Gösteriniz.

   ÇÖZÜM 1: (Sonuç 17.5.1 kullanılarak)

Lütfen aşağıdaki açıklamalara uyan şekiller çiziniz. Çizeceğiniz şekiller anlamanızı kolaylaştıracaktır.

Düzlemde $y = 0$ doğrusu Ox eksenidir. r yarıçapı ne kadar büyük seçilirse seçilsin, düzlemde hiç bir $A = (x_0, y_0)$ merkezli ve r yarıçaplı

$$D(A, r) = \sqrt{(s - x_0)^2 + (t - y_0)^2} \leq r^2$$

diski Ox ekseninin tamamını kapsayamaz. Çünkü D diski içindeki her (s, t) noktası için $\sqrt{(s - x_0)^2 + (t - y_0)^2} \leq r^2$ dir. Ox ekseni üzerinde $\sqrt{(x - x_0)^2 + (0 - t)^2} > r^2$ koşulunu sağlayan $(x, 0)$ noktaları vardır ve bu noktalar D diski dışındadır. O halde $y = 0$ doğrusu sınırsızdır.

Benzer olarak, yukarıdaki gibi seçilecek her D diski içinde kalan hiperbol kollarına ait $(x, y) = (x, \frac{1}{x})$ noktaları için $\sqrt{(x - x_0)^2 + (\frac{1}{x} - y_0)^2} \leq r^2$ olmalıdır. x yeteri kadar büyük (ya da küçük) seçildiğinde

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (\frac{1}{x} - y_0)^2} > r^2$$

olacaktır. Tabii, bu koşulu sağlayan ve hiperbole ait olan $(x, y) = (x, \frac{1}{x})$ noktaları D diski dışında kalır. O halde $xy = 1$ hiperbolü sınırsızdır.

Son olarak, $xy = 1$ hiperbolü ile $y = 0$ doğrusu arasındaki uzaklığın 0 olduğunu gösterelim. Doğruyu A, hiperbolü B ile gösterelim. (17.51) uyarınca, iki küme arasındaki uzaklık, d Öklit metriği olmak üzere,

$$d(A, B) = \inf\{d(u, v) \, : \, u \in A, v \in B\}$$

dir. $[u \in A \Rightarrow u = (s, 0),\ s \in \mathbb{R}]$ ve $[v \in B \Rightarrow v = (t, \frac{1}{t}),\ t \in \mathbb{R}]$ olduğundan, hiperbol ve doğru üzerinde apsisleri eşit olan noktalar arasındaki uzaklığın, apsis yeterince büyük alındığında sıfıra yaklaştığını aşağıdaki bağıntıdan görebiliriz:

$$\begin{aligned}
d(A, B) &= \inf\{d(u, v) \, : \, u \in A, v \in B\} \\
&= \inf\{\sqrt{(s - t)^2 + (0 - \frac{1}{t})^2}, \quad (s, t \in \mathbb{R})\} \\
&= \inf\{\sqrt{(t - t)^2 + (0 - \frac{1}{t})^2}, \quad (t \in \mathbb{R})\}, \qquad s = t \text{ konursa} \\
&= \inf\{\frac{1}{t}, \quad (t \in \mathbb{R})\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

O halde $xy = 1$ hiperbolü ile $y = 0$ doğrusu arasındaki uzaklık 0 dır. Bu örnek, ayrık iki küme arasındaki uzaklığın 0 olabileceğini göstermektedir.

Çözüm 2: (Tanım 17.5.1 kullanılarak)

Metrik uzayda bir A kümesinin çapı (17.50) formülü ile

$$\rho(A) = \sup\{\rho(x, y) \, : \, x, y \in A\}$$

biçiminde tanımlanmıştır.

$y = 0$ doğrusu $A = \{u : u = (x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ kümesidir. Öklit metriğini d ile gösterelim. Her $r > 0$ sayısı için $d(u, v) > r$ olacak biçimde $u, v \in A$ noktaları daima vardır. Gerçekten $u = (s, 0)$ ie $v = (t, 0)$ noktalarını $|s - t| > r$ olacak biçimde seçebiliriz. O halde $u, v \in A$ noktaları arasındaki uzaklıklar sınırsızdır. Dolayısıyla $\rho(A)$ çapı sınırsızdır.

Benzer olarak, $xy = 1$ hiperbolü $B = \{u : u = (x, \frac{1}{x}) : x \neq 0, x \in \mathbb{R}\}$ kümesidir. Öklit metriğini d ile gösterelim. Her $r > 0$ sayısı için $d(u, v) > r$ olacak biçimde $u, v \in B$ noktaları daima vardır. Gerçekten $u = (s, \frac{1}{s})$ ile $v = (t, \frac{1}{t})$ noktalarını $s = -t$ olacak biçimde seçebilir ve sonra s yi yeterince büyüterek $d(u, v)$ uzaklığını istediğimiz kadar büyütebiliriz:

$$\begin{aligned} d(B) &= \sup\left\{d(u, v) : u, v \in B, u = (s, \frac{1}{s}), v = (t, \frac{1}{t})\right\} \\ &= \sup\left\{\sqrt{(s-t)^2 + (\frac{1}{s} - \frac{1}{t})^2}, \qquad s, t \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \sup\left\{\sqrt{(2t)^2 + (\frac{2}{t})^2}, \qquad t \in \mathbb{R}\right\}, \qquad s = -t \text{ konursa} \\ &= \infty \end{aligned}$$

O halde $u, v \in B$ noktaları arasındaki uzaklıklar sınırsızdır. Dolayısıyla $\rho(B)$ çapı sınırsızdır.

2. Salt metriğe göre $\mathbb{R}$ uzayında $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ile $\left\{(n + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\right\}$ dizisinin öğelerinden oluşan A kümesi veriliyor. Bu kümeler kapalı mıdır? Bu kümeler kesişir mi? Bu kümeler sınırlı mıdır? Bu kümeler arasındaki uzaklık nedir?

Çözüm:

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi salt metriğe göre $\mathbb{R}$ uzayında kapalıdır. Çünkü $\mathbb{N}' = \mathbb{R} - \mathbb{N}$ tümleyeni açıktır. Gerçekten her $n \in \mathbb{N}$ için $(n, n+1) \subset \mathbb{N}'$ açıktır ve

$$\mathbb{N}' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1)$$

dir. O halde, açık kümelerin bir bileşimine eşit olan $\mathbb{N}'$ tümleyeni açık bir kümedir. Dolayısıyla $\mathbb{N}$ kapalıdır.

Şimdi $A = \left\{(n + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\right\}$ kümesini düşünelim. Her n için

$$\left((n + \frac{1}{n}), (n + 1 + \frac{1}{n+1})\right) \subset A'$$

açıktır ve

$$A' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left((n + \frac{1}{n}), (n + 1 + \frac{1}{n+1})\right)$$

dir. O halde, açık kümelerin bir bileşimine eşit olan A' tümleyeni açık bir kümedir. Dolayısıyla A kapalıdır.

$A = \left\{(n + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\right\}$ kümesinde $n = 1$ alınırsa $(n + \frac{1}{n}) = 2 \in \mathbb{N}$ olur. O halde $A \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$ dir. Dolayısıyla aralarındaki uzaklık $d(A, \mathbb{N}) = 0$ dır.

n sınırsız olarak büyüdüğünden her iki küme sınırsızdır.

3. Bir metrik uzaydaki sonlu her kümenin sınırlı olduğunu gösteriniz.

   Çözüm:

   $X, \rho)$ metrik uzayında $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sonlu bir altküme olsun. Bu kümenin çapı, içindeki nokta çiftleri arasındaki uzaklıkların supremumudur:

   $$\rho(A) = sup\,\{\rho(x_i, x_j) : \qquad (1 \leq i, j \leq n)\} \subset \mathbb{R}$$

   dır. $K = \{\rho(x_i, x_j)\}$ sayıları

   $$\frac{n!}{r!(n-1)!}$$

   tanedir. $\mathbb{R}$ içinde her sonlu küme sınırlıdır ve maksimumu vardır. Dolayısıyla $\sup K = \max K < \infty$ dir. O halde $\rho(A)$ sonludur. Öyleyse A sınırlıdır.

4. Bir (X, ρ) metrik uzayında her A alt kümesi için $\rho(A) = \rho(\bar{A})$ olduğunu gösteriniz.

   Çözüm:

   $x, y \in \bar{A}$ ise $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ olacak biçimde $x_n), (y_n) \subset A$ dizileri seçilebilir. $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$ dir. Buradan, (17.50) uyarınca

   $$\begin{aligned} \rho(A) &\leq \rho(\bar{A}) \\ &= sup\{\rho(x, y) \,:\, x, y \in \bar{A}\} \\ &= sup\{\rho(x_n, y_n) \,:\, (x_n), (y_n) \subset A\} \\ &\leq sup\{\rho(a, b) \,:\, a, b \in A\} \\ &\leq \rho(A) \end{aligned}$$

   çıkar; yani $\rho(A) \leq \rho(\bar{A}) \leq \rho(A)$ olur ki bu $\rho(A) = \rho(\bar{A})$ olması demektir.