17.3 METREL TOPOLOJİ

17.3.1 PROBLEMLER

1. (X,ρ) bir metrik uzay olsun. Her $(x,y) \in X\times X$ için $\delta(x,y) = \inf\{1, \rho(x,y)\}$ diyelim. Bu durumda ρ ile δ metriklerinin denk olduğunu; yani $\mathscr{T}_\rho = \mathscr{T}_\delta$ olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: Açık yuvarlar metrel topolojilerin tabanıdır. Önerme 4.1.2 uyarınca

   $$B_\rho(x,r) \subset B_\delta(x,p) \subset B_\rho(x,q)$$

   olacak şekilde r, p, q sayılarının varlığını göstermek yetecektir.

   $r < 1$ ise

   $$\rho(x,y) = r \Rightarrow \delta(x,y) = \inf\{1, \rho(x,y)\} = \rho(x,y) = r \tag{17.6}$$

   dir. (17.6) eşitliği dikkate alınırsa, her p için $r = \frac{p}{2}$ konumuyla

   $$B_\rho(x,r) \subset B_\delta(x,p) \tag{17.7}$$

   elde edilir. Karşıt olarak, her $q < 1$ için $p = \frac{q}{2}$ konumuyla, (17.6) dan

   $$B_\delta(x,p) \subset B_\rho(x,q) \tag{17.8}$$

   elde edilir. (17.7) ve (17.8) gereğince ρ ve δ metrikleri denktirler; yani X üzerinde aynı topolojiyi belirlerler: $\mathscr{T}_\rho = \mathscr{T}_\delta$.

2. ρ ile δ bir X kümesi üzerinde tanımlı iki metrik olsun. Eğer her $(x,y) \in X \times X$ için

   $$a\delta(x,y) \le \rho(x,y) \le b\delta(x,y) \tag{17.9}$$

   eşitsizlikleri sağlanacak biçimde pozitif a ve b sayıları varsa, ρ ile δ nın denk olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: $\rho(x,y) = r \wedge \delta(x,y) = p \Rightarrow ap \le r \le bp$ olduğunu dikkate alırsak,

   $$B_\delta(x, \frac{p}{a}) \subset B_\rho(x,r) \subset B_\delta(x, \frac{p}{b})$$

   olduğunu görürüz. O halde, önceki problemde ifade edilen nedenle $\mathscr{T}_\rho = \mathscr{T}_\delta$ olacaktır.

3. `Örnek 17.2.1` de tanımlanan δ metriğini X yerine $\mathbb{R}^2$ koyarak düşününüz. Başlangıç merkezli açık ve kapalı birim yuvarları bulunuz. Açık birim yuvarın kaplamı kapalı birim yuvara eşit midir? Birim yuvarın kenar kümesi nedir?

   Çözüm: Örnek 17.2.1 deki tanım uyarınca, düzlemdeki her x, y noktası için δ metrik fonksiyonu

   $$\delta(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \ne y \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Buna göre, $O = (0, 0)$ başlangıç noktasının r yarıçaplı açık yuvarı $B_\delta(O, r)$ ile gösterilirse, δ nın tanımından

$$B_\delta(O, r) = \begin{cases} \{O\}, & r < 1 \\ \mathbb{R}^2 - \{O\}, & r \geq 1 \end{cases}$$

çıkar. Buradan açıkça görüldüğü gibi, açık birim yuvar

$$B_\delta(O, 1) = \{x \mid \delta(O, x) < 1\} = \{O\}$$

dır. Kapalı yuvar ise

$$D_\delta(O, 1) = \{x \mid \delta(O, x) \leq 1\} = \mathbb{R}^2$$

dir. $\mathscr{T}_\delta$ metrel topolojisinin açık kümeleri yalnızca dört tanedir:

$$\mathscr{T}_\delta = \{\emptyset, \{O\}, \{\mathbb{R}^2 - \{O\}\}, \mathbb{R}^2\}$$

Bunlar aynı zamanda metrel topolojinin kapalı kümeleridir. Öyleyse $B_\delta(O, 1) = \{0\}$ açık birim yuvarının kaplamı kendisidir; dolayısıyla kapalı birim yuvara eşit değildir. Benzer olarak, $D_\delta(O, 1)$ kapalı birim yuvarının kaplamı gene kendisidir; yani $\mathbb{R}^2$ dir. $\mathbb{R}^2 = \{O\} \cup (\mathbb{R}^2 - \{O\})$ olduğundan, metrel uzayın her noktası bir iç noktadır. Dolayısıyla birim yuvarın kenar noktası yoktur.

4. (a, b) açık aralığının kaplamının [a,b] kapalı aralığı olduğunu gösteriniz. Daha genel olarak, $\mathbb{R}^n$ ya da $\mathbb{C}^n$ uzaylarında, Öklid metriğine göre $B(a, r)$ açık yuvarlarının kaplamlarının $D(a, r)$ kapalı yuvarları olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: (a, b) nin kaplamı, (a, b) yi kapsayan bütün kapalı kümelerin arakesitidir. [a,b] kapalıdır ve $(a, b) \subset [a, b]$ dir Öyleyse, $\overline{(a, b)} \subset [a, b]$ dir. Öte yandan her $x \in [a, b]$ için $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap [a, b) \neq \emptyset$ dir. Dolayısıyla, $[a, b] \subset \overline{(a, b)}$ dir. Bu iki kapsama bağıntısı $[a, b] = \overline{(a, b)}$ olmasını gerektirir.

   $\mathbb{R}^n$ uzayındaki durum için, (a, b) yerine $B(a, r)$ açık yuvarı, $[a, b]$ yerine $D(a, r)$ kapalı yuvarı konularak, yukarıdaki usavurma aynen tekrarlanabilir.

5. `Örnek 17.2.1` deki δ metriğinin X kümesi üzerinde tanımladığı metrel topolojinin ayrık topoloji olduğunu gösteriniz.

   Çözüm:

   Söz konusu tanım uyarınca, her $x, y \in X$ için δ metrik fonksiyonu

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyor. Buna göre, her hangi bir $x \in X$ noktasının r yarıçaplı açık yuvarı $B_\delta(x,r)$ ile gösterilirse, δ nın tanımından

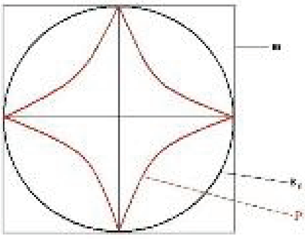
$$B_\delta(x,r) = \begin{cases} \{x\}, & r < 1 \\ X - \{x\}, & r \geq 1 \end{cases}$$

çıkar. Buradan açıkça görüldüğü gibi, $0 < r1$ için açık birim yuvar

$$B_\delta(O,r) = \{y \,|\, \delta(x,y) < r\} = \{x\}$$

dir. Bu demektir ki her $x \in X$ noktası için tek öğeli $\{x\}$ kümesi açık bir kümedir. O halde $(X, \mathscr{T}_\delta)$ uzayı ayrık bir uzaydır.

6. Önceki bölümde tanımlanan $\delta, \mathfrak{p}, \mathfrak{m}$ ve $\mathfrak{s}_n$ metriklerini $\mathbb{R}^2$ için üzerinde düşününüz. Merkezleri düzlemde $0 = (0,0)$ noktası ve yarıçapları $r = 1$ olan açık yuvarları, herbirisi için, çiziniz.


P