Bölüm 17

METRİK UZAYLAR

17.1 NORMLU UZAYLAR

17.1.1 Problemler

1. Karmaşık sayılar kümesi üzerinde, her sayıyı o sayının salt değerine götüren dönüşümün bir norm olduğunu gösteriniz.

   ÇÖZÜM:

   $z \to |z|$ diye tanımlanan $|| : \mathbb{C} \to [0, \infty)$ dönüşümünün bir norm olduğunu göstermek için N1-N3 norm belitlerinin sağlandığını göstermeliyiz. Gerçekten, her $u, v \in \mathbb{C}$ ve $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ya da $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ olmak üzere her $\alpha in \mathbb{K}$ için aşağıdakilerin sağlandığı karmaşık sayıların özeliklerinden çıkar:

   N1. $|u + v| \leq |u| + |v|$ (alt-toplamsallık)

   N2. $|\alpha u| = |\alpha||u|$ (Pozitif homojenlik)

   N3. $u \neq 0 \Rightarrow |u| \neq 0$

   Not: Bu problem Örnek 17.1.3 ve Örnek 17.1.4 de $n = 1$ alınırsa özel bir hal olarak ortaya çıkar.

2. Bu bölümde ayrıntılı ispatları verilmeden geçilen örnekleri ayrıntılarına inerek ispatlayınız.

   İspatlar öğrenciye bırakılmıştır.

17.2 METRİK

METRİK UZAY KAVRAMI

17.2.1 Problemler

1. Bu kesimde ispatı yapılmayan örnekleri ispatlayınız.

Önerme 17.2.4 ün İspatı: ρ nun metrikimsi olduğunu göstermek için M1, M2,M4 belitlerinin sağlandığını göstermeliyiz. Varsayımımız uyarınca η_n ler metrikimsi olduğundan, herbirisi M1, M2,M4 belitlerini sağlar. Buradan şu sonuçları çıkarabiliriz:

M1: $\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(x,y) \geq 0$ olur.

M2:

$$\begin{aligned}\rho(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\eta_n(x,y)\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\eta_n(x,z)+\eta_n(z,y)\right)\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\eta_n(x,z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\eta_n(z,y)\\ &= \rho(x,z)+\rho(z,y)\end{aligned}$$

dır.

M4: Her n için $x = y \Rightarrow \eta_n(z,y) = 0$ olduğundan

$$x = y \Rightarrow \rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\eta_n(x,y) = 0$$

olur.

Sonuç 1: Her n için η_n ler birer metrik ise

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\eta_n(x,y) \tag{17.1}$$

dönüşümü de bir metriktir.

İSPAT: Yukarıda yapılanlara ek olarak M3 ile M5 belitlerinin de sağlandığını göstermek yetecektir. Her bir η_n bunu sağladığına göre ρ nun da bu özelikleri sağlayacağı apaçıktır.

Sonuç 2: Her n için η_n ler birer metrik ise

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{\eta_n(x,y)}{1+\eta_n(x,y)} \tag{17.2}$$

dönüşümü de bir metriktir.

İSPAT: μ bir metrik ise

$$\delta(x,y) = \frac{\mu(x,y)}{1+\mu(x,y)} \tag{17.3}$$

dönüşümü de bir metriktir (bkz 5.Problem).

Buna göre, her n için $\eta_n = \delta_n$ konumu yapılırsa (17.2) ifadesi

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \delta_n(x,y) \tag{17.4}$$

biçimini alır. (17.1) uyarınca, bu bir metriktir. Dolayısıyla, (17.2) ifadesi bir metriktir.

2. $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2)$ öğeleri $\mathbb{R}^2$ kümesinden alınmak üzere, aşağıdakilerden hangileri $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir metrik değildir?

$$\begin{aligned} \rho(x,y) &= min\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \\ \delta(x,y) &= (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \\ \psi(x,y) &= |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| \end{aligned}$$

ÇÖZÜM:

ρ *bir metrik değildir.* $x = (-2,0), y = (2,0), z = (0,1)$ noktalarını düşünelim. $\rho(x,y) = 4 > 1 + 1 = \rho(x,z) + \rho(z,y)$ olduğundan üçgen eşitsizliği sağlanmaz. Öyleyse ρ bir metrik değildir.

δ *bir metrik değildir.* $x = (-2,0), y = (2,0), z = (0,1)$ noktalarını düşünelim. $\delta(x,y) = 4 > 1^2 + 1^2 = 2 = \rho(x,z) + \rho(z,y)$ olduğundan üçgen eşitsizliği sağlanmaz. Öyleyse δ bir metrik değildir.

ψ *bir metrik değildir.* $x = y$ olduğunda $\psi(x,y) \neq 0$ olduğundan M4 beliti sağlanmaz.

3. Sonlu sayıda (X_i, η_i), $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, metrik uzayları veriliyor.
$X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ olsun. $x, y \in X$ iiçin $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha(x,y) &= \left(\sum_{i=1}^{n} [\eta_i(x_i, y_i)]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \beta(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} \eta_i(x_i, y_i) \\ \gamma(x,y) &= \max\{\eta_i(x_i, y_i) : 1 \leq i \leq n\} \end{aligned}$$

fonksiyonları tanımlanıyor. Bunlar X üzerinde birer metrik midir?

ÇÖZÜM:

α *bir metriktir.* Bunu görmek için Tanım 17.2.1 ile verilen M1-M5 metrik belitlerinin sağlandığını kanıtlamalıyız. η_i lerin her biri bir metrik olduğundan M1, M3, M4 ve M5 belitlerinin sağlandığı apaçıktır. Geriye M2 üçgen eşitsizliğini göstermek kalmıştır. Bunun için Önerme 17.1.2 (Cauchy-Scwartz Eşitsizliği) ve Önerme 17.2.3 (Minkowski Eşitsizliği) ispatlarında kullanılan yöntemin aynısı kullanılarak $\alpha(x,y) \leq \alpha(z,y) + \alpha(y,x)$ üçgen eşitsizliğinin sağlandığı gösterilebilir.

β *bir metriktir.* Bunu görmek için Tanım 17.2.1 ile verilen M1-M5 metrik belitlerinin sağlandığını kanıtlamalıyız. η_i lerin her biri bir metrik olduğundan M1, M3, M4 ve M5 belitlerinin sağlandığı apaçıktır. Geriye M2 üçgen eşitsizliğini göstermek kalmıştır.

$$\begin{aligned}\beta(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} \eta_i(x_i,y_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} (\eta_i(x_i,z_i) + \eta_i(z_i,y_i)) \\ &= \beta(x,z) + \beta(z,y)\end{aligned}$$

olduğundan, üçgen eşitsizliği de sağlanır.

γ *bir metriktir.* Bunu görmek için Tanım 17.2.1 ile verilen M1-M5 metrik belitlerinin sağlandığını kanıtlamalıyız. η_i lerin her biri bir metrik olduğundan M1, M3, M4 ve M5 belitlerinin sağlandığı apaçıktır. Geriye M2 üçgen eşitsizliğini göstermek kalmıştır.

$$\begin{aligned}\gamma(x,y) &= \max\{\eta_i(x_i,y_i) : 1 \leq i \leq n\} \\ &\leq \max\{(\eta_i(x_i,z_i) + \eta_i(z_i,y_i)) : 1 \leq i \leq n\} \\ &\leq \max\{\eta_i(x_i,z_i) : 1 \leq i \leq n\} + \max\{\eta_i(z_i,y_i) : 1 \leq i \leq n\} \\ &= \gamma(x,z) + \gamma(z,y)\end{aligned}$$

olduğundan, üçgen eşitsizliği de sağlanır.

4. $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ den $\mathbb{R}$'ye tanımlanan

$$\rho(z_1,z_2) = |z_1 - z_2|$$

fonksiyonunun bir metrik olduğunu gösteriniz. Buna, karmaşık sayılar üzerindeki *salt değer metriği* diyeceğiz.

Bkz. Örnek 17.2.3.

5. (X,ρ) bir metrik uzay olsun. Her $x,y \in X$ için

$$\delta(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

diye tanımlanan δ fonksiyonunun da X üzerinde bir metrik olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Bunu görmek için Tanım 17.2.1 ile verilen M1-M5 metrik belitlerinin sağlandığını kanıtlamalıyız. η_i lerin her biri bir metrik olduğundan M1, M3, M4 ve M5 belitlerinin sağlandığı apaçıktır. Geriye M2 üçgen eşitsizliğini göstermek kalmıştır.

$t \to \frac{t}{1+t}$ ile tanımlanan $f : [0, \infty) \to [0, 1)$ fonksiyonu süreklidir. Çünkü sürekli iki fonksiyonun oranıdır ve payda 0 dan farklıdır. Ayrıca f birebir-örten ve artan bir fonksiyondur. Öyleyse

$$t < t_1 + t_2 \Rightarrow f(t) < f(t_1) + f(t_2)$$

dir. Şimdi t yerine ρ metriğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
\delta(x, y) &= \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)} \\
&\leq \frac{\rho(x, z)}{1 + \rho(x, z)} + \frac{\rho(z, y)}{1 + \rho(z, y)} \\
&= \delta(x, z) + \delta(z, y)
\end{aligned}$$

elde edilir.

6. (X, ρ) bir metrik uzay olsun. $X \times X$ den $\mathbb{R}$'ye tanımlanan aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri X üzerinde bir metriktir?

$$\begin{aligned}
\delta(x, y) &= k\rho(x, y), \quad (k \in \mathbb{R}^+) \\
\gamma(x, y) &= k\rho(x, y), \quad (k \in \mathbb{R}) \\
\mu(x, y) &= [\rho(x, y)]^n, \quad (n \in \mathbb{N}) \\
\nu(x, y) &= [\rho(x, y)]^r, \quad (0 < r < 1)
\end{aligned}$$

ÇÖZÜM:

(a) $\delta(x, y)$ bir metriktir.

(b) $\gamma(x, y)$ metrik değildir, çünkü $k < 0$ için M1 beliti sağlanmaz.

(c) $\mu(x, y)$ metrik değildir, çünkü M2 beliti sağlanmaz. Bunu bir karşıt örnekle gösterebiliriz. $\mathbb{R}$ üzerinde $\rho(x, y) = inf\{1, |x - y|\}$ metriğini alalım. $\rho(0, 1) = 1, \rho(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, \rho(\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{2}$ olduğundan $n > 1$ için

$$\begin{aligned}
\mu(0, 1) &= [\rho(0, 1)]^n \\
&= 1 \\
&\leq (\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})^n \\
&= [\rho(0, \frac{1}{2})]^n + [\rho(\frac{1}{2}, 1)]^n \\
&= \mu(0, \frac{1}{2}) + \mu(\frac{1}{2}, 1)
\end{aligned}$$

olur. O halde üçgen eşitsizliği sağlanmıyor.

(d) $\nu(x, y)$

7. X kümesine ait sabit bir a noktası seçelim. Her $f, g \in \mathbb{C}^X$ için

$$\rho : (f,g) \to \rho(f,g) = |f(a) - g(a)|$$

diye tanımlanan ρ dönüşümü $\mathbb{C}^x$ üzerinde bir metrikimsidir. Neden?

Çözüm:

ρ nun M1, M2 ve M4 metrik belitlerini sağladığını göstermeliyiz.

M1: Her $f, g \in \mathbb{C}^X$ için $|f(a) - g(a)| \geq 0$ dur.

M2: Her $f, g, h \in \mathbb{C}^X$ için

$$\begin{aligned}
\rho(f,g) &= |f(a) - g(a)| \\
&= |f(a) - h(a) + h(a) - g(a)| \\
&\geq |f(a) - h(a)| + |h(a) - g(a)| \\
&= \rho(f,h) + \rho(h,g)
\end{aligned}$$

çıkar.

M4: $f \equiv g$ ise $\rho(f,g) = |f(a) - g(a)| = 0$ olur.

8. Bütün karmaşık dizilerin oluşturduğu kümeye $\mathfrak{C}$ diyelim; yani

$$\mathfrak{C} = \{x | x = (x_n), x_n \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

olsun. Gösteriniz ki

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \tag{17.5}$$

diye tanımlanan ρ fonksiyonu $\mathfrak{C}$ kümesi üzerinde bir metriktir.

Çözüm: Her n için $\eta_n(x,y) = |x_n - y_n|$ konulursa, istenen (17.2) den çıkar.

Bunu görmek için Tanım 17.2.1 ile verilen M1-M5 metrik belitlerinin sağlandığını kanıtlamalıyız. η_i lerin her biri bir metrik olduğundan

9. Bir $[a,b]$ aralığı üzerinde sınırlı değişimli bütün fonksiyonların oluşturduğu kümeyi $\mathfrak{B}[a,b]$ ile göstereceğiz. Bunun bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz. Her f fonksiyonunun tam değişimini $\delta(f)$ ile temsil edersek, $f \to \delta(f)$ dönüşümünün bu uzay üzerinde bir yarı norm olduğu, ama bir norm olmadığı kolayca görülebilir. Dolayısıyla,

$$(f,g) \to \rho(f,g) = \delta(f - g)$$

dönüşümü bu uzay üzerinde bir metrikimsi olur. Gösteriniz.

Çözüm:

Bir $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı gerçel değerli f fonksiyonunun sınırlı değişimli (bounded variation) olması demek,

$$\delta(f) = sup\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_{i+1} - f(x_i)| \, a = x_0 < x-1 < x_2 < \ldots < x_n = b, \, n \in \mathbb{N}\}$$

sayısının, ($[a, b]$ aralığının bütün bölüntüleri için) sınırlı olması demektir. Bu durumda, $\delta(f)$ sayısına f nin değişimi (variation) denilir.

Analizden bilindiği üzere sınırlı değişimli iki fonksiyonun toplamı ve bir sayı (skaler) ile çarpımı gene sınırlı değişimlidir. Kolayca görüleceği gibi, $(\mathfrak{B}[a, b]$ kümesi $f + g$ toplamına gör bir Abel grubudur. Ayrıca, $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere λf sayı ile çarpma işlemine kapalıdır. Bu işlemlere göre, her $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ ve her $f, g \in \mathfrak{B}[a, b]$ için

$$\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$$
$$(\alpha + \lambda) = \alpha f = \lambda f$$
$$(\alpha\lambda) f = \alpha(\lambda f)$$

eşitlikleri sağlanır. Dolayısıyla $(\mathfrak{B}[a, b]$ kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

$$f \to \delta(f)$$

dönüşümünün, Tanım 17.1.1 ile verilen N1 ve N2 norm belitlerini sağlar. Ama $f \neq 0$ olması $\delta(f) = 0$ olmasını gerektirmez. O halde δ bir norm değil, yarı-normdur.