17.11 TAMLIK VE TIKIZLIK

17.11.1 Problemler

1. *Tıkız bir metrik uzaydan her hangi bir metrik uzaya tanımlı sürekli bir fonksiyonun düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.*

   Çözüm: (X, d) ile (Y, μ) metrik uzaylar, X tıkız ve $f : X \to Y$ sürekli olsunlar. f nin düzgün sürekli olduğunu göstereceğiz. Her hangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. f sürekli olduğundan

   $$(\forall x \in X)(\exists \delta_x)[d(x, y) < \delta_x \Rightarrow \mu(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2} \tag{17.20}$$

   olur.

   $$U_x = B_d(x, \frac{\delta_x}{2}) = \{y : y \in X, \, d(x, y) < \frac{\delta_x}{2}\} \tag{17.21}$$

   kümesi açıktır. Dolayısıyla $\mathscr{U} = \{U_x : x \in X\}$ ailesi X uzayının açık bir örtüsüdür. X tıkız olduğundan, bu açık örtünün sonlu bir alt örtüsü vardır. Bu örtüye $\mathscr{V} = \{U_{x_1}, U_{x_2}, U_{x_3}, \ldots, U_{x_n}\}$ diyelim. Sonra $\delta > 0$ sayısını $\delta = \frac{1}{2} \min\{\delta_{x_1}, \delta_{x_1}, \delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_1}\}$ eşitliği ile tanımlayalım. Bu sayıyı kullanarak, f nin düzgün sürekli olduğunu gösterebiliriz.

   $\epsilon > 0$ yukarıda verilen sayı olsun. Her $x \in X$ için $x \in U_{x_i}$ olacak biçimde bir $U_{x_i} \in \mathscr{V}$ vardır. O halde

   $$d(x_i, x) < \frac{\delta_{x_i}}{2} \tag{17.22}$$

   olacaktır. Şimdi $x, y \in X$ noktaları $d(x, y) < \delta$ koşulunu sağlıyorlarsa, (17.22) ve üçgen eşitsizliğinden,

   $$d(x_i, y) < d(x_i, x) + d(x, y) < \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} \leq \delta_{x_i} \tag{17.23}$$

   yazılabilir. (17.20) dan,

   $$\mu(f(x), f(y)) < \mu(f(x), f(x_i)) + \mu(f(x_i), f(y)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \tag{17.24}$$

   çıkar. Öyleyse, f düzgün süreklidir.

2. *Gerçel eksenin tıkız her alt kümesinin sınırlı ve kapalı olduğunu gösteriniz.*

   Sınırlılığı:

   $K \subset \mathbb{R}$ tıkız olsun. $\mathbb{R}$ üzerindeki salt metriği d ile gösterelim; yani her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ olsun. Rasgele bir $x_o \in K$ noktası alalım. $B(x_o, n) = \{d(x_0, x) < n\}$ açık yuvarlarını (açık aralıklar) ele alalım. Bu aralıklar iç-içe büyüyen açık kümelerdir:

   $$B(x_o, 1) \subset B(x_o, 2) \subset B(x_o, 3) \subset \cdots \subset B(x_o, n) \subset \cdots$$

$\mathscr{B} = \{B(x_o, n) : \quad n = 1, 2, 3, \ldots\}$ ailesi bütün $\mathbb{R}$ yi örter; dolayısıyla K tıkız alt kümesini de örtecektir. Tıkızlık tanımı uyarınca, $\mathscr{B}$ ailesinin K kümesini örten sonlu bir alt örtüsü vardır. Buna $\mathscr{A} = \{B(x_o, n_i) : \quad i = 1, 2, 3, \ldots, k\}$ diyelim ve gerekirse yeniden sıralayarak $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ olduğunu varsayalım. Örtü iç-içe büyüyen bir aile olduğuna göre en büyük yarı-çaplı küme $B(x_o, n_k)$ aralığıdır. Bu aralık bütün K kümesini örter (kapsar). O halde, her $x, y \in K$ için $d(x, y) < n_k$ olacaktır. Dolayısıyla $d(K) \leq n_k < \infty$ dir.

Kapalılığı:

`Teorem 15.1.3` uyarınca, bir Hausdorff uzayının her tıkız alt-kümesi kapalıdır. Salt topolojiye göre $\mathbb{R}$ Hausdorff'tur. Dolayısıyla $K \subset \mathbb{R}$ tıkız alt-kümesi kapalıdır.

$K \subset \mathbb{R}$ tıkız alt-kümesinin kapalı olduğunu, 15.1.3 Teoremini kullanmadan, doğrudan ispat edebiliriz. Önerme 2.4.3 uyarınca, K nın kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul bütün yığılma noktalarını içermesidir; yani $\tilde{K} \subset K$ olmalıdır. Eğer K sonlu ise $\tilde{K} = \emptyset$ olacağından $\tilde{K} \subset K$ koşulu sağlanır ve K kapalı olur.

K sonsuz olsun. $\tilde{K} \not\subseteq K$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, K nın içermediği bir $y \in \tilde{K}$ yığılma noktası var olur. $\mathbb{R}$ Birinci sayılabilme Aksiyomunu sağladığı için, $x_n \in B(y, \frac{1}{n})$ olacak şekilde bir $x_n \in K$ seçerek $x_n \to y$ olan bir $(x_n) \subset K$ sonsuz dizisi oluşturabiliriz. $y \notin K$ olduğundan her $x \in K$ için $y \neq x$ dir. Öyleyse, $(x_n) \subset K$ dizisi K nın hiç bir noktasına yakınsamaz. O halde, her $x \in K$ noktasının, (x_n) dizisinin en çok sonlu sayıda terimini içeren bir $B(x, \epsilon_x)$ komşuluğu var olmalıdır. Bu komşulukların bileşimi K nın açık bir örtüsüdür:

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \epsilon_x)$$

K tıkız olduğundan bu örtüden sonlu bir

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x, \epsilon_{x_i})$$

alt-örtüsü seçilebilir. Bunların her birisi (x_n) dizisinin ancak sonlu sayıda terimini içerdiğinden, $(x_n) \subset K$ dizisi sonsuz terim içeremez. Bu bir çelişkidir. Bu çelişki $\tilde{K} \not\subseteq K$ varsayımından gelmiştir. Öyleyse $\tilde{K} \subset K$ olmalıdır. Böyle olması K nın kapalı olması demektir.

17.12 GERÇEL SAYILARIN TAMLIĞI

17.12.1 Problemler

1. Cantor Arakesişme Özeliği'nde (bkz. `Teorem 17.8.1`, (F_n) kümelerinin kapalılık koşulunun kaldırılamayacağını gösteriniz.

Yol gösterme:

$$A_n = (0, \frac{1}{n}], n = 1, 2, 3, \dots$$

kümeler dizisinin arakesitinin boş olduğunu görünüz.

ÇÖZÜM: A_n ailesinin arakesitinin boş olmadığını varsayalım.

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n} \\ \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(x \leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

olmalıdır. Son ifade Arşimet İlkesi ile çelişir. Çünkü, Arşimet İlkesine göre her $x > 0$ sayısı için $\frac{1}{n} < x$ eşitsizliğini sağlayan bir n doğal sayısı vardır. Öyleyse varsayımımız yanlıştır:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n} = \emptyset$$

dir. Bu demektir ki, Teorem 17.8.3 de konulan (F_n) kümelerinin kapalılık koşulu kadırıldığına, arakesit boş olabilir.

2. İrrasyonel sayıların gerçel sayılar kümesi içinde yoğun olduğunu gösteriniz.

   ÇÖZÜM:

   Rasyonel sayılar kümesini Q ile ve irrasyonel sayılar kümesini P le gösterelim. Teorem 4.1.2 uyarınca, rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ içinde yoğundur; yani $\overline{Q} = \mathbb{R}$ dir. Öte yandan, Örnek 17.7.3 te her irrasyonel sayıya yakınsayan bir rasyonel dizi olduğunu gösterdik. O halde $P \subset \overline{Q} = \mathbb{R}$ dir. Buradan,

   $$\overline{P} \subset \overline{\overline{Q}} = \overline{Q} = \mathbb{R}$$

   çıkar.

3. $\mathbb{R}^n (n > 1)$ Öklid uzayının tam olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:
İşlemlerde basitlik için $n = 2$ alacağız. $n > 2$ olduğu durumlar için de benzer işlem yapılabilir. Salt metriğe göre $\mathbb{R}$ nin tam olduğunu biliyoruz. Bunu kullanarak $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Öklit uzayının tam olduğunu gösterelim. $\mathbb{R}^2$ uzayındaki Öklit metriği $a = (x_1, y_1)$ ve $b = (x_2, y_2)$ olmak üzere $d((a, b)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ dir. $((x_n, y_n)) \in \mathbb{R}^2$ bir Cauchy dizisi olsun. Her $\epsilon > 0$

sayısı için öyle bir $n_\epsilon > 0$ sayısı vardır ki

$$\begin{aligned}
m, n > n_\epsilon &\Rightarrow \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} < \epsilon \\
&\Rightarrow [\sqrt{(x_n - x_m)^2} < \epsilon] \wedge [\sqrt{(y_n - y_m)^2} < \epsilon] \\
&\Rightarrow [|x_n - x_m| < \epsilon] \wedge [|y_n - y_m| < \epsilon] \\
&\Rightarrow (x_n), (y_n) \quad \text{Cauchy dizileridir} \\
&\Rightarrow [x_n \to x] \wedge [|y_n \to y], \quad \mathbb{R} \quad \text{tam olduğundan yakınsarlar} \\
&\Rightarrow (x_n, y_n) \to (x, y)
\end{aligned}$$

olur.