17.9 TAMLAMA

17.10 BAIRE SINIFLANDIRMASI

17.10.1 Problemler

1. *Salt topolojiye göre gerçel sayıların sonlu bir alt-kümesi hiç bir yerde yoğun değildir. Gösteriniz.*

   ÇÖZÜM: $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ sonlu alt kümesini düşünelim. Gerekirse yeniden sıralayarak, $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$ olduğunu varsayabiliriz. Her $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ için, $\{a_i\}$ kapalıdır. Çünkü $\{a_i\}' = (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ tümleyeni açıktır. Hiç bir $\{a_i\}$ açık bir aralık kapsamaz. Kapalı kümelerin sonlu bileşimi olan

   $$A = \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\} \tag{17.18}$$

   kümesi kapalı olduğundan $A = \bar{A}$ dır. A' tümleyeni açıktır ve

   $$A' = (-\infty, a_1) \cup (a_1, a_2) \cup (a_2, a_3) \cup \ldots \cup (a_{n-1}, a_n) \cup (a_n, +\infty) \tag{17.19}$$

   biçiminde açık aralıkların bir bileşimi olarak yazılabilir. Tanım 2.5.4 uyarınca, $(\bar{A})^o = \emptyset$ ise A kümesi hiç bir yerde yoğun değildir.

   $$A = \bar{A} \Leftrightarrow A^o = (\bar{A})^o$$

   dır.

   Olmayana Ergi Yöntemini kullanalım. $(\bar{A})^o \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. $(\exists x)(x \in A^o = (\bar{A})^o)$ olmalıdır. İç nokta tanımı uyarınca $x \in (s, t) \subset A$ olacak biçimde açık bir (s, t) aralığı var olmalıdır. Oysa böyle bir aralık (17.18) içinde değil, (17.19) içinde kapsanabilir. Bu bir çelişkidir. O halde kabulümüz yanlıştır; $(\bar{A})^o = \emptyset$ olmalıdır.

2. *Hiç bir yerde yoğun olmayan kümelerin sonlu sayıdasının bileşimi de hiç bir yerde yoğun değildir. Gösteriniz.*

   ÇÖZÜM:

   , $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \subset X$ hiç bir yerde yoğun olmayan (seyrek) alt kümeler olsun. Sonlu tümevarım ilkesini kullanacağız.

   Bir A kümesinin seyrek olması için gerekli ve yeterli koşul, her açık T kümesinin A ile kesişmeyen bir açık U altkümesinin var olmasıdır; $U \subset T$ ve $U \cap A = \emptyset$.

   Şimdi bu özeliği ard arda uygulayalım.

   A_1 seyrek olduğundan, her T_1 açık kümesinin A_1 ile kesişmeyen bir U_1 açık alt kümesi vardır: $U_1 \subset T_1$ ve $U_1 \cap A_1 = \emptyset$.

A_2 seyrek olduğundan, yukarıda varlığı söylenen U_1 açık kümesinin A_2 ile kesişmeyen bir U_2 açık alt kümesi vardır: $U_2 \subset U_1$ ve $U_2 \cap A = \emptyset$.

Bu iki bağıntıdan $U_2 \cap (A_1 \cap A_2) = \emptyset$ çıkar. Her açık T_1 kümesi için böyle bir $U_2 \subset T_1$ açık kümesi var olduğuna göre $A \cup B$ bileşimi seyrek bir kümedir.

Sonlu tüme varım yöntemiyle, sonlu sayıda seyrek kümelerin bileşiminin de seyrek olduğunu söyleyebiliriz.

3. *Hiç bir yerde yoğun olmayan (seyrek) bir kümenin tümleyeni yoğun bir alt kümedir. Gösteriniz.*

   ÇÖZÜM: $A \subset X$ hiçbir yerde yoğun olmasın. Tanım 2.5.4 uyarınca, $(\bar{A})^o = \emptyset$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned}(\bar{A})^o = \emptyset &\Rightarrow ((\bar{A})^o)' = X \\ &\Rightarrow \overline{(\bar{A})'} = X \\ &\Rightarrow \overline{(A')^o} = X \\ &\Rightarrow \overline{((A')^-)^o} = X \\ &\Rightarrow ((A')^-)^o = X\end{aligned}$$

   yazılabilir. Son eşitlik A' tümleyen kümesinin her yerde yoğun olduğu anlamına gelir.

4. *Yukarıdaki özeliğin karşıtı doğru mudur? Başka bir deyişle,* "yoğun bir alt-kümenin tamlayanı hiç bir yerde yoğun değildir"*, denebilir mi?*

   ÇÖZÜM: Hayır. Örneğin, rasyonel sayılar kümesi gerçel sayılar içinde yoğundur. Bunun tümleyeni olan irrasyonel sayılar kümesi de gerçel sayılar içinde yoğundur.