16.12 YOL İLE BAĞLANTILI UZAYLAR

Tanım 16.12.1. $(X, \mathscr{T})$ uzayının her öğe çifti bir yol ile birbirine bağlanabiliyorsa, X uzayına *yol ile bağlantılı* ya da, kısaca, `yol bağlantılı` bir uzaydır, denilir.

Tanım 16.12.2. $(X, \mathscr{T})$ uzayında $p, q \in X$ öğeleri verilsin. Sonlu sayıda $A_1, A_2, \ldots, A_m$ alt-kümeleri için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa sonlu $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ ailesine p noktasını q noktasına birleştiren *basit bir zincir* denilir.

$$A_i \cap A_j = \emptyset \Leftrightarrow |i - j| > 1 \tag{16.10}$$

$$p \in A_1 \wedge (i > 1 \Rightarrow p \notin A_i \tag{16.11}$$

$$q \in A_m \wedge (i < m \Rightarrow q \notin A_i \tag{16.12}$$

Teorem 16.12.1. *Yol bağlantılı her uzay bağlantılı bir uzaydır.*

İSPAT: $(X, \mathscr{T})$ uzayı yol bağlantılı olsun. Olmayana Ergi Yöntemini kullanalım. X bağlantısız olsaydı, $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ olacak biçimde açık A ve B kümeleri var olurdu (bkz. Teorem 16.2.1). $a \in A$ ve $b \in B$ noktalarını rasgele seçelim. X yol bağlantılı olduğundan $\gamma(0) = a$ ve $\gamma(1) = b$ olacak şekilde bir $\gamma : [0, 1] \to X$ bir $\ell(a, b)$ yolu vardır. γ sürekli olduğundan $\gamma^{-1}(A)$ ve $\gamma^{-1}(B)$ kümeleri $[0, 1]$ içinde açık kümelerdir. Ayrıca $[0, 1] = \gamma^{-1}(A) \cup \gamma^{-1}(A)$ ve $\gamma^{-1}(A) \cap \gamma^{-1}(A) = \emptyset$ dir. $[0, 1]$ kümesi bağlantılı olduğundan, açık ve ayrık iki kümenin bileşimi olamaz. Bu çelişki X uzayının bağlantılı olmadığı varsayımından gelmiştir. O halde X bağlantılıdır. $\square$

Teorem 16.12.2. $(X, \mathscr{T})$ *bağlantılı bir uzay ve* $\mathscr{U}$ *ailesi* X *in açık bir örtüsü olsun. Her* $x, y \in X$ *öğe çiftini birleştiren bir basit zincir daima* $\mathscr{U}$ *örtüsünden seçilebilir.*

İSPAT: Bir $x \in X$ öğesi verilsin. H kümesi x noktası ile $\mathscr{U}$ örtüsünden seçilen basit bir örtü ile birleşebilen bütün öğelerden oluşsun. $x \in H$ olduğundan $H \neq \emptyset$ dir. H kümesinin hem açık hem kapalı olduğunu gösterirsek $H = X$ olduğu sonucu çıkacaktır (bkz. teorem 16.2.1 ve Önerme 16.9.5).

Önce H kümesinin açık olduğunu gösterelim. Bir $h \in H$ öğesi alalım. H nın kuruluşu gereğince, $\mathscr{U}$ örtüsünden h ile x noktalarını birleştiren basit bir zincir seçilebilir. Bu zinciri $\{G_1, G_2, \ldots, G_m\} \subset \mathscr{U}$ ile gösterelim.

$$\begin{aligned} u \in G_1 - G_2 &\Rightarrow G_1, G_2, \ldots, G_m \quad \text{basit zinciri } u \text{ ile } x \text{ noktalarını birleştirir} \\ v \in G_1 \cap G_2 &\Rightarrow G_2, G_3, \ldots, G_m \quad \text{basit zinciri } v \text{ ile } x \text{ noktalarını birleştirir} \\ &\Rightarrow h \in G_1 \subset H \end{aligned}$$

olur. O halde, H kümesi h noktasının bir komşuluğudur. Her $h \in H$ için bu söylenebilir. Öyleyse, H kümesi kendisine ait her noktaya komşuluk ediyor. Dolayısıyla açık bir kümedir (bkz. Önerme 5.1.1).

Şimdi H kümesinin kapalı olduğunu gösterelim. Bir $u \in H'$ noktası seçelim. $\mathscr{U}$ ailesi X kümesinin açık bir örtüsü olduğundan $u \in G$ olan bir $G \in \mathscr{U}$

vardır. $G \cap H \neq \emptyset$ ise $h \in G \cap H$ olan bir h öğesi var olmalıdır. Bu durumda, $\mathscr{U}$ içinde h ile x noktalarını birleştiren basit bir $G_1, G_2, \ldots, G_m$ zinciri var olacaktır. Bu ise ya $G, G_1, G_2, \ldots, G_m$ zincirinin ya da $G_1, G_2, \ldots, G_m$ zincirinin u ile x noktalarını birleştirdiği sonucunu doğurur. Bu durumda $u \in H$ olur, ki bu bir çelişkidir. Bu çelişki $G \cap H \neq \emptyset$ olduğu varsayımımızdan doğmuştur. Öyleyse $G \cap H = \emptyset$ olmalıdır. Dolayısıyla, $u \in G \subset H'$ çıkar ki bu H' kümesinin açık olduğu anlamuna gelir. Dolayısıyla $(H')' = H$ kapalı olur.

16.13 PROBLEMLER

1. U kümesi $\mathbb{R}^2$ içinde açık ve bağlantılı bir küme ise, U nun yol ile bağlantılı olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: Bir $a \in U$ noktasını seçelim. U içinde bir yol ile a noktasına bağlanabilen bütün x noktalarından oluşan kümeye A diyelim; yani her $x \in A$ için bir $\ell(a, x)$ yolu var olsun. Bu durumda A kümesi yol ile bağlantılıdır. İspatı yapmak için $A = U$ olduğunu göstermek yetecektir.

   Önce A nın açık olduğunu göstereceğiz. U açık olduğundan, her $x \in A$ için $B(x, \epsilon) \subset U$ olacak şekilde bir ϵ komşuluğu vardır. Her $y \in B(x, \epsilon)$ noktasını x merkezine bir doğru parçası ile bağlayabiliriz (bunu görmek için y noktasından geçen yarıçapı düşününüz). Buna $\ell(x, y)$ diyelim. Bu durumda $\ell(a, x) \cup \ell(x, y)$ bileşimi a noktasını y noktasına birleştiren bir yol olur. Bu iş her $y \in B(x, \epsilon)$ için yapılabileceğine göre, $B(x, \epsilon) \subset A$ olmalıdır. Öyleyse, A kümesi kendisine ait her noktanın bir komşuluğudur. Dolayısıyla A açıktır.

   Şimdi de A nın kapalı olduğunu gösterelim. Bir $x \in \bar{A}$ verilsin. U açık ve $x \in U$ olduğundan $B(x, \epsilon) \subset U$ olacak biçimde bir ϵ komşuluğu vardır. Kaplama noktası tanımı uyarınca, $y \in B(x, \epsilon) \cap A$ olacak şekilde bir y noktası seçilebilir. Yukarıdaki sonuç uyarınca, y noktasını a noktasına birleştiren bir yol vardır. Buna $\ell(a, y)$ diyelim. Gene yukarıdaki düşünüşle, y noktası x merkezine bir doğru parçası ile bağlıdır. Buna $\ell(y, x)$ diyelim. Bu durumda $\ell(a, y) \cup \ell(y, x)$ bileşimi a noktasını x noktasına birleştiren bir yol olur. O halde $x \in A$ olacaktır. her $x \in \bar{A}$ için bu yapılabileceğine göre $\bar{A} \subset A$ dır; yani A kapalıdır.

   Demek ki A kümesi hem açık hem kapalıdır. U bağlantılı ve $A \neq \emptyset$ olduğundan $A = U$ olmalıdır.

2. X bağlantılı bir uzay ve C bağlantılı bir alt uzayı olsun. $A \subset X$ kümesi için $A \cap C \neq \emptyset$ ve $A' \cap C \neq \emptyset$ ise, $\partial A \cap C \neq \emptyset$ olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: Olmayana Ergi Yöntemini kullanacağız. $\partial A \cap C = \emptyset$ olduğunu varsayalım. $\partial A = \partial A'$ olduğundan, $\partial A' \cap C = \emptyset$ olacaktır. Aşağıdaki bağıntıların varlığı kolayca görülür.

$$X = C \cap (A \cup A') \tag{16.13}$$
$$X = C \cap (\bar{A} \cup \bar{A}') \tag{16.14}$$
$$\bar{A} = A \cup \partial A \tag{16.15}$$
$$\partial A = \bar{A} \cap \bar{A}' \tag{16.16}$$
$$C \cap \bar{A} = C \cap (A \cup \partial A) \tag{16.17}$$
$$= (C \cap A) \cup (C \cap \partial A) \tag{16.18}$$
$$= (C \cap A) \tag{16.19}$$
$$C \cap \bar{A}' = C \cap (A' \cup \partial A') \tag{16.20}$$
$$= (C \cap A') \cup (C \cap \partial A') \tag{16.21}$$
$$= C \cap A' \tag{16.22}$$
$$(C \cap \bar{A}) \cap (C \cap \bar{A}') = \emptyset \tag{16.23}$$

(16.15) ve (16.23) uyarınca $(C \cap \bar{A})$ ve $(C \cap \bar{A}')$ kümeleri X uzayının ayrık iki bileşenidir. X bağlantılı bir uzay olduğundan bu bir çelişkidir. Bu çelişki $\partial A \cap C = \emptyset$ kabulümüzden gelmiştir. O halde, $\partial A \cap C \neq \emptyset$ olmalıdır.

3. $f : X \to Y$ bir bölüm dönüşümü olsun. Y uzayı bağlantılı olduğunda, her $y \in Y$ için $f^{-1}(\{y\}) \subset X$ bağlantılı ise X uzayının da bağlantılı olduğunu gösteriniz.

   ÇÖZÜM: Olmayana Ergi Yöntemini kullanacağız. X uzayının bağlantılı olmadığını varsayarsak, hem açık hem kapalı bir $A \subset X$ alt kümesi var olmalıdır. Her $y \in Y$ için $f^{-1}(\{y\}) \cap A$ kümesi $f^{-1}(\{y\})$ içinde hem açık hem kapalıdır. O halde ya $f^{-1}(\{y\}) \subset A$ ya da $f^{-1}(\{y\}) \subset A'$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}
f(A) \cap f(A') = \emptyset &\Rightarrow f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(f(A')) = \emptyset \\
&\Rightarrow \big(A = f^{-1}(f(A))\big) \wedge \big(A' = f^{-1}(f(A'))\big) \\
&\Rightarrow f(A) \subset Y \quad \text{hem açık hem kapalıdır;} \\
&\qquad \text{çünkü } f \text{ bölüm dönüşümüdür} \\
&\Rightarrow (A = \emptyset) \vee (A = Y) \quad \text{çünkü Y bağlantılıdır}
\end{aligned}$$

4. $\mathbb{R}$ içinde sayılabilir hiç bir alt küme salt topolojiye göre bağlantılı değildir. Gösteriniz.

   ÇÖZÜM: $\mathbb{R}$ içinde sayılabilir bir kümeyi

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n < \ldots$$

biçiminde sıralayabiliriz. Her n için $x_{n-1} < \alpha_{n-1} < x_n < \alpha_n < x_{n+1}$ olacak şekilde bir (α_{n-1}, α_n) aralığı vardır. Dolayısıyla x_n öğesinin bileşeni yalnızca $\{x\}$ dir. O halde $\{x_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ kümesi tamamen bağlantısızdır.

5. $Y \subset \mathbb{R}^2$ sayılabilir bir alt küme ise $\mathbb{R}^2 \setminus Y$ bağlantılıdır. Gösteriniz.

   ÇÖZÜM: $Y = \{x_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ diyelim. Her n için tek öğeli $\{x_n\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ içinde tıkızdır. Problem 16.11.1-8 uyarınca $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_n\}$ yerel bağlantılıdır. Yerel bağlantılı alt kümelerin her arakesiti yerel bağlantılı olduğundan,

$$\left(\mathbb{R}^2 \setminus Y\right) = \left(\mathbb{R}^2 \setminus \{x_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}\right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \left(\mathbb{R}^2 \setminus \{x_n\}\right)$$

   yerel bağlantılıdır.

6. $\mathbb{R}$ içinde $a < b < c$ olmak üzere $[a, b) \cup (b, c]$ kümesi yerel bağlantılı olduğu halde bağlantılı değildir. Neden?

   ÇÖZÜM: $\mathbb{R}$ içinde bir kümenin bağlantılı olması için gerekli ve yeterli koşul bir aralık olmasıdır. $[a, b) \cup (b, c]$ kümesi bir aralık olmadığından bağlantılı olamaz. Öte yandan, her $x \in [a, b)$ için $[a, b)$ aralığı x noktasının bağlantılı bir komşuluğudur. Benzer olarak, her $y \in (b, c]$ için $(b, c]$ aralığı y noktasının bağlantılı bir komşuluğudur. Demek ki $[a, b) \cup (b, c]$ kümesine ait her noktanın bağlantılı bir komşuluğu vardır. Dolayısıyla $[a, b) \cup (b, c]$ kümesi yerel bağlantılıdır.

7. Tamamen bağlantısız uzayın sürekli bir dönüşüm altındaki resmi tamamen bağlantısız olmayabilir. Bir örnekle gösteriniz.

   ÇÖZÜM: Sabit bir fonksiyon düşünmek yetecektir. Örneğin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = 0$ diye tanımlanmış olsun. Bu fonksiyon süreklidir ve tamaman bağlantısız $\mathbb{Q}$ kümesini bağlantılı $\{0\}$ kümesi üzerine resmeder.