16.11 YEREL BAĞLANTILI UZAYLAR

Tanım 16.11.1. Bir topolojik uzayın her noktasının bağlantılı kümelerden oluşan bir komşuluklar tabanı varsa, bu uzaya *yerel bağlantılı* uzaydır, denilir.

Tanım 16.11.2. $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayı ile bir Y kümesi ve bir $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Y üzerindeki topolojiler arasında f fonksiyonunu sürekli kılan en ince (en kuvvetli) topolojiye *tümel topoloji* denilir. Bu durumda f ye *tümel dönüşüm* diyeceğiz.

Bazı kaynaklarda, `tümel topolojiye` *bölüm topolojisi* ve `tümel dönüşüme` *bölüm dönüşümü* denilir. Bu yaklaşım bizim daha önce yaptığımız 8.2.2 ve 8.2.3 tanımları ile uyumludur.

Teorem 16.11.1. *Yerel bağlantılı uzayın her tümel uzayı da yerel bağlantılıdır.*

İSPAT: $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayı ile $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. X ve f ye göre Y üzerindeki tümel topolojiyi $\mathscr{U}$ ile gösterelim; yani $\mathscr{U}$ topolojisi $f : X \to Y$ fonksiyonunu sürekli kılan en ince (kuvvetli) topoloji olsun. $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayı yerel bağlantılı ise, $(Y, \mathscr{U})$ uzayının da yerel bağlantılı olduğunu göstereceğiz. Bir uzayın yerel bağlantılı olması için gerekli ve yeterli bir koşulun, uzayın her açık alt-kümesinin bileşeninin de açık olması olduğunu biliyoruz (bkz. Teorem 16.11.1(c)). O halde, Y nin açık kümelerinin bileşenlerinin de açık olduğunu göstermek yetecektir.

$V \in \mathscr{U}$ verilsin ve bunun bileşeni C olsun. $V \subset C$ dir. C nin açık olduğunu göstereceğiz. Tümel topoloji tanımı uyarınca $f^{-1}(V) \in \mathscr{T}$ ve $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(C)$ dir. $x \in f^{-1}(C)$ noktasının bileşenini D_x ile gösterelim. $x \in D_x \subset f^{-1}(V) \subset f^{-1}(C) \subset X$ dir. D_x bağlantılı ve f sürekli olduğundan $f(D_x) \subset Y$ bağlantılıdır (bkz. Önerme 16.5.1). $x \in D_x \cap f^{-1}(C)$ olduğundan $f(D_x) \subset V$ dir ve dolayısıyla $f(D_x) \cap C \neq \emptyset$ olacaktır. Oysa bileşen olduğundan C kümesi V kümesini kapsayan en büyük bağlantılı kümedir. Öyleyse $f(D_x) \cap C = C$ dir, ki bu $f(D_x) \subset C$ olması demektir. Buradan $D_x \subset f^{-1}(C)$ çıkar. D_x kümesi $f^{-1}(V)$ içinde bir bileşendi. Her $x \in f^{-1}(C)$ için bunu yapabiliriz. Öyleyse, $f^{-1}(C)$ kümesi $f^{-1}(V)$ içindeki bazı bileşenlerin bir bileşimidir.

Öte yandan, X yerel bağlantılı ve $f^{-1}(V)$ açıktır. Öyleyse her bileşeni de açık olmalıdır (bkz. Teorem 16.11.1(c)); yani her $x \in f^{-1}(C)$ için D_x bileşeni açıktır. $f^{-1}(C) = \bigcup\{D_x : x \in f^{-1}(C)\}$ olduğundan $f^{-1}(C)$ açıktır. Demek ki, $f(f^{-1}(C)) = C$ açıktır. C kümesi açık V kümesinin bileşeni idi. Her $V \in \mathscr{U}$ için bunu yapabileceğimize göre, $(Y, \mathscr{U})$ uzayındaki her açık kümenin bileşeninin de açık olduğu ortaya çıkar. O halde, Teorem 16.11.1(c) uyarınca, $(Y, \mathscr{U})$ uzayı yerel bağlantılıdır. □

16.11.1 Problemler

1. Tıkız ve yerel bağlantılı bir uzayın ancak sonlu sayıda bileşenleri vardır.

   ÇÖZÜM: Sonsuz tane bileşeni olduğunu varsayalım. Bileşenlerin her birisi açık olduğundan, bileşenler ailesi uzayın bir açık örtüsü olur. Uzay tıkız ise sonlu bir alt örtüsü seçilebilir. Oysa bileşenler birbirlerinden ayrıktır. Onların sonlu tanesi uzayı örtemez. Çelişki. □

2. Sürekli ve açık fonksiyonlar yerel bağlantılılığı korurlar.

   ÇÖZÜM: $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ sürekli ve açık bir dönüşüm olsun. $f(X) = Y$ olduğunu varsayalım. f sürekli olduğundan $V \in \mathscr{B}(f(x))$ ise $x \in f^{-1}(V) \in \mathscr{B}(x)$ olacaktır. $(X, \mathscr{T})$ yerel bağlantılı ise $x \in X$ noktasının bağlantılı kümelerden oluşan bir $\mathscr{U}(x)$ yerel tabanı vardır. O halde $f^{-1}(V)$ komşuluğu için $x \in U_x \subset f^{-1}(V)$ olacak şekilde bir $U_x \in \mathscr{U}(x)$ kümesi vardır. $x \in T \subset U_x$ açık kümesi seçebiliriz. f açık bir dönüşüm olduğundan $f(T)$ açık bir kümedir ve $f(x) \in f(T) \subset f(Ux) \subset V \in \mathscr{B}(f(x))$ dir. Ayrıca, f fürekli ve U_x bağlantılı olduğundan $f(U_x)$ bağlantılıdır. Bu demektir ki, $\{f(Ux) : U_x \in \mathscr{U}(x)\}$ ailesi $f(x)$ noktasının bağlantılı kümelerden oluşan bir yerel tabanıdır.

3. Yerel bağlantılı uzayların boş olmayan sonlu bir ailesinin kartezyen çarpımı da yerel bağlantılıdır.

   ÇÖZÜM: $(X_i, \mathscr{T}_i)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sonlu tane yerel bağlantılı uzay ve bunların çarpım topolojsi de $(X, \mathscr{T})$ olsun. Her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $(X_i, \mathscr{T}_i)$ uzayı yerel bağlantılı olduğundan, her $x_i \in X_i$ noktası için bağlantılı kümelerden oluşan bir $\mathfrak{U}_i(x_i)$ yerel tabanı vardır. $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x \in X$ ise her $V \in \mathscr{B}(x)$ komşuluğu için $U_i \in \mathfrak{U}_i(x_i)$ olmak üzere $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n = U \subset V$ seçilebilir. U bağlantılıdır. □

4. Yerel bağlantılı uzayların boş olmayan keyfi bir ailesinin kartezyen çarpımı yerel bağlantılı olmayabilir. (*Yol Gösterme : İki öğeli bütün ayrık uzayların kartezyen çarpımını düşününüz.*)

   ÇÖZÜM: Her $\lambda \in \Lambda$ in $X_\lambda = \{0, 1\}$ kümeleri üzerinde ayrık topoloji var olsun. Bu uzaylar yerel bağlantılıdır. $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ çarpım topolojisinin bir $\mathscr{B}$ tabanına ait kümeler, 9.Bölüm (9.9) formülünde açıklandığı gibi,

$$N_\lambda = \begin{cases} X_\lambda, & \lambda \neq \lambda_i, (1 \leq i \leq n) \\ T_i, & \lambda = \lambda_i \end{cases} \tag{16.8}$$

   olmak üzere $B = \prod_{\lambda \in I} N_\lambda$ biçimindedirler. Çarpan uzaylar ayrık olduğundan (16.8) formülünde her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $T_i = \{0\}$ ya da $T_i = \{1\}$ biçimindedirler. Bunlar hem açık hem kapalı olduğundan N_λ kümeleri de hem açık hem kapalı olacaktır. Öyleyse, bir $x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in X$ noktasının her A komşuluğu için $x \in B \subset A$ olacak şekilde bir $B \in \mathscr{B}$ kümesi vardır. Bu demektir ki, x noktasının her komşuluğu hem açık hem kapalı has bir alt küme kapsıyor. Öyleyse, Teorem 16.2.1 x noktasının bağlantılı bir komşuluğu olamaz. Dolayısıyla, yerel bağlantılı $X_\lambda = \{0, 1\}$ uzaylarının X çarpım uzayı yerel bağlantılı değildir.

5. Hem bağlantılı, hem yerel bağlantılı olan uzayların boş olmayan bir ailesinin kartezyen çarpımı yerel bağlantılı olur.

ÇÖZÜM: Her $\lambda \in \Lambda$ in $X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda$ uzayları hem bağlantılı, hem yerel bağlantılı olsunlar. $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ üzerindeki $\mathscr{T}$ çarpım topolojisi bağlantılıdır (bkz. Teorem 16.7.1). $\mathscr{T}$ çarpım topolojisinin bir $\mathscr{B}$ tabanına ait kümeler, 9.Bölüm (9.9) formülünde açıklandığı gibi,

$$N_\lambda = \begin{cases} X_\lambda, & \lambda \neq \lambda_i, (1 \leq i \leq n) \\ T_i, & \lambda = \lambda_i \end{cases} \tag{16.9}$$

olmak üzere $B = \prod_{\lambda\in I} N_\lambda$ biçimindedirler. Bir $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in X$ noktasının her A komşuluğu için $x \in B \subset A$ olacak şekilde bir $B \in \mathscr{B}$ kümesi vardır. Çarpan uzayların herbiri yerel bağlantılı olduğundan, (16.8) formülünde her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $x_i \in T_i$ kümesini bağlantılı seçebiliriz. Bu durumda N_λ lar bağlantılı olur. Bunun sonucu olarak $x \in B \in \mathscr{B}$ olacak şekilde bağlantılı bir $B \in \mathscr{B}(x)$ vardır. O halde bağlantılı ve yerel bağlantılı uzayların çarpımı yerel bağlantılıdır.

6. Boş olmayan yerel bağlantılı uzaylardan oluşan bir ailenin sonlu sayıdası dışındakiler bağlantılı ise, kartezyen çarpımları yerel bağlantılı olur.

ÇÖZÜM: Bu problemi daha genel biçimiyle ifade edbiliriz:

Teorem: Yerel bağlantılı uzaylardan oluşan bir $\{(X_\imath, \mathscr{T}_\imath) : \imath \in I\}$ topolojik uzaylar ailesinin $(X, \mathscr{T})$ çarpım uzayının yerel bağlantılı olması için gerekli ve yeterli koşul, verilen ailenin sonlu sayıdası hariç geri kalanların hepsinin bağlantılı olmasıdır.

GEREKLIĞI: $X = \prod_{\imath\in I} X_\imath$ çarpımının $\mathscr{T}$ çarpım topolojisine göre yerel bağlantılı olduğunu varsayalım. Çarpım uzayın tanımı uyarınca her $j \in I$ için $\pi_j : \prod_{\imath\in I} X_\imath \to X_j$ izdüşümü sürekli, açık ve örten bir dönüşümdür. O halde X_j çarpan uzayı X çarpım uzayının bir tümel (bölüm) uzayıdır. Teorem 16.11.1 uyarınca X_j çarpan uzayı yerel bağlantılıdır.

Şimdi bir $x \in X$ seçelim. X yerel bağlantılı olduğundan, x noktasının bağlantılı bir M komşuluğu vardır. $x \in V \subset M$ olacak şekilde $\mathscr{T}$ çarpım topolojisinin alt-tabanına ait açık bir V kümesi seçebiliriz. Bu durumda, sonlu sayıda $j \in I$ dışında $\pi_j(V) = X_j$ olacaktır. Buradan, gene sonlu sayıda $j \in I$ dışında $\pi_j(M) = X_j$ olacağı sonucu çıkar. M bağlantılı ve π_j sürekli olduğundan, Önerme 16.5.1 uyarınca, sonlu sayıdası hariç geri kalan X_j çarpan uzayları bağlantılı olur.

YETERLIĞI: Şimdi bütün $X_\imath, (\imath \in I)$ çarpan uzayların hepsinin yerel bağlantılı ve sonlu sayıda $i = i_1, i_2, \ldots, i_n$ indisi ile damgalı $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n}$ çarpan uzayları hariç geri kalan bütün $\imath \in I$ indisleri için $X_\imath$ çarpan uzaylarının hepsinin bağlantılı olduğunu varsayalım. Bu durumda X çarpım uzayının her noktada yerel bağlantılı olduğunu göstereceğiz. Herhangi bir $x \in X$ noktası ile bu noktayı içeren açık bir G kümesi seçelim; yani $x \in G \in \mathscr{T}$ olsun. G kümesi çarpım topolojinin alt-tabanına ait olan ve x öğesini içeren bir V kümesini kapsar. 9:Bölüm (9.9) formülüne göre $V = \prod_{\imath\in I} V_\imath$ dir. Tabii burada sonlu sayıda $j = j_1, j_2, \ldots, j_m$ indisi hariç geri kalan bütün $\imath \in I$ için $V_\imath = X_\imath$ dır. Sonlu olduklarını söylediğimiz bazı i indisleri ile bazı j indisleri çakışabilir.

Bu sonlu indislerin bileşimi olan $K = \{i_1, i_2, \ldots, i_n, j_1, j_2, \ldots, j_m\}$ kümesini düşünelim. K sonludur ve $K \subset I$ dır. Her $k \in K$ için $\pi_k(x) \in W_k \subset V_k \subset X_k$ koşulunu sağlayan bir W_k bağlantılı kümesini seçebiliriz. Notasyon uyumluluğunu sağlamak amacıyla, her $s \in I - K$ için $W_s = X_s$ diyelim. Bu şekilde oluşturulan $\{W_\imath : \imath \in I\}$ kümeler ailesinin herbiri bağlantılıdır. Teorem 16.7.1 uyarınca $W = \prod_{\imath \in I} W_\imath$ çarpımı bağlantılıdır. Her $\imath \in I$ için $\pi_\imath(x) = x_\imath \in W_\imath$ olduğundan $x = (x_\imath) \in W$ dur.

Her $\imath \in I$ için $U_\imath = W_\imath^o$ diyelim. Bu durumda $U = \prod_{\imath \in I} U_\imath$ çarpımı x öğesini içeren açık bir kümedir. O halde W kümesi $x \in X$ noktasının bağlantılı bir komşuluğudur. $x \in U \subset V \subset G$ olduğunu düşünerek, x noktasının her komşuluğunun bağlantılı bir komşuluk kapsadığını söyleyebiliriz. Her $x \in X$ noktası için bu iş yapılabileceğine göre, $(X, \mathscr{T})$ çarpım uzayı yerel bağlantılıdır.

7. Rasyonel sayılar kümesi, salt topolojiye göre, yerel bağlantılı değildir.

Çözüm: Bir $q \in \mathbb{Q}$ verilsin. Arşimet kuralı gereğince $n.q^2 > 1$ olacak biçimde bir n doğal sayısı vardır. $n^2 + 1 > n$ olduğundan $(1 + n^2)q^2 > 1$ yazabiliriz. Buradan

$$A = \left\{p : p^2 > \frac{1}{1+n^2}, p \in \mathbb{Q}\right\}, \qquad B = \left\{p : p^2 < \frac{1}{1+n^2}, p \in \mathbb{Q}\right\}$$

kümelerini tanımlayalım. $q \in A$ dır. Ayrıca $\mathbb{Q} = A \cup B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olduğu görülür. Salt topoloji tanımı uyarınca, her $p \in A$ için $(p - \epsilon, p + \epsilon) \cap \mathbb{Q} \subset A = B'$ olacak biçimde bir $\epsilon > 0$ sayısı vardır. O halde A kümesinin hiçbir noktası B nin bir yığılma veya kaplama noktası olamaz. Benzer düşünüşle, B kümesinin hiçbir noktası A nın bir yığılma veya kaplama noktası olamaz. Bunu simgelerle gösterirsek

$$p \in A \Rightarrow p \notin \bar{B}$$
$$p \in B \Rightarrow p \notin \bar{A}$$

Öyleyse $A = \bar{A}$ ve $B = \bar{B}$ olmalıdır; yani a ile B kümeleri kapalıdır. Buradan

$$\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = A \cap B = \emptyset$$

yazabiliriz. Şimdi rasyonel bir r sayısının hiçbir bağlantılı komşuluğu olamayacağını gösterelim. Olmayana Ergi Yöntemini kullanacağız. r nin bağlantılı bir C komşuluğu varolsun.

$$(C \cap A) \cup (C \cap B) = C, \qquad (C \cap A) \cap (C \cap B) = \emptyset$$

$$\overline{(C \cap A)} \cap (C \cap B) = \emptyset, \qquad (C \cap A) \cap \overline{(C \cap B)} = \emptyset$$

olduğu görülür. Bu durum C nin bağlantılı olmasıyla çelişir. Bu çelişki olamayacağına göre, C nin bağlantılı olduğu varsayımımız geçersizdir.

Hiçbir bağlantılı komşuluğu olamayacağından rasyonel sayılar kümesi r noktasında yerel bağlantılı değildir. Her $r \in \mathbb{Q}$ için bunu yapabileceğimize göre, rasyonel sayılar salt topolojiye göre yerel bağlantılı değildir. $\square$

8. $\mathbb{R}^2$ yerel bağlantılıdır. K tıkız bir altküme ise $\mathbb{R}^2 - K$ yerel bağlantılıdır.

   ÇÖZÜM: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dir. $\mathbb{R}$ yerel bağlantılıdır. Yerel bağlantılı uzayların sonlu sayıdasının kartezyen çarpımı da yerel bağlantılıdır (bkz. Problem 16.11.3).

   $\mathbb{R}^2$ Hausdorff olduğundan K tıkız bir altküme ise K kapalıdır. Dolayısıyla $\mathbb{R}^2 - K$ açıktır. $x \in \mathbb{R}^2 - K$ noktası için $B \in \mathscr{B}(x)$ ise $x \in T \subset B$ ve $T \subset \mathbb{R}^2 - K$ olacak biçimde açık bir T komşuluğu vardır. $\mathbb{R}$ yerel bağlantılı olduğundan, x noktasının T içinde kapsanan bağlantılı bir A komşuluğu olmalıdır. Her $x \in \mathbb{R}^2 - K$ noktası için bu iş yapılabileceğine göre, $\mathbb{R}^2 - K$ yerel bağlantılıdır. $\square$

9. Yerel bağlantılı bir uzayın her hangi bir bölüm uzayı da yerel bağlantılıdır.

   ÇÖZÜM: $(X, \mathscr{T})$ uzayında bir $\sim$ denklik bağıntısına göre bölüm kümesi $Y = X/\sim$ ve bölüm dönüşümü $\varphi : X \to Y$ olsun. Y üzerindeki bölüm topolojisi, $\varphi : X \to Y$ bölüm dönüşümünü sürekli kılan topolojiler arasında en ince (en kuvvetli) olan topolojidir; yani tümel topolojidir. Yerel bağlantılı bir uzayın sürekli bir dönüşüm altındaki resmi de yerel bağlantılıdır (bkz. 16.11.1, Problem 16.11.2). O halde Y yerel bağlantılıdır.

10. Her ayrık uzay yerel bağlantılıdır.

    ÇÖZÜM: Ayrık uzayda her x noktası için $\{x\}$ kümesi bağlantılı bir komşuluktur ve x noktasının her komşuluğu tarafından kapsanır. Dolayısıyla $\{x\}$ sistemi Tanım 16.11.1 koşullarını sağlar.

11. Tamamen bağlantısız her uzay yerel bağlantılıdır.

    ÇÖZÜM: Tamamen bağlantısız uzayda her x noktasının bileşeni yalnızca tek öğeli $\{x\}$ kümesidir. Tabii $\{x\}$ en büyük bağlantılı bir komşuluktur ve x noktasının her komşuluğu tarafından kapsanır. Dolayısıyla $\{x\}$ sistemi Tanım 16.11.1 koşullarını sağlar.

12. Gerçel eksende $[0,1] \cup [2,3]$ kümesinin yerel bağlantılı olduğunu ama bağlantılı olmadığını gösteriniz.

    ÇÖZÜM: Teorem 16.8.1 gereğince, $\mathbb{R}$ uzayında bir alt-kümenin bağlantılı olması için gerekli ve yeterli koşul bir aralık olmasıdır. $A = [0,1] \cup [2,3]$ kümesi bir aralık olmadığı için bağlantılı değildir.