16.9 BİR UZAYIN BİLEŞENLERİ

Tanım 16.9.1. Bir topolojik uzayın bir x öğesini içeren bileşenine x öğesinin bileşeni diyecek ve bunu B_x simgesiyle göstereceğiz.

16.9.1 Problemler

1. Bir uzayın bağlantılı olması için gerekli ve yeterli koşul bir tek bileşeninin olmasıdır. Gösteriniz.

   GEREKLIĞI: $(X, \mathscr{T})$ uzayı bağlantılı ise kesişmeyen ve boş olmayan iki açık kümesinin bileşimi olarak yazılamaz. Öyleyse, uzayın X den farklı bir bileşeni olamaz.

   YETERLIĞI: X in tek bileşeni varsa, bu bileşen X in bütün öğelerini içermek zorundadır. Dolayısıyla, sözkonusu bileşen X dir. □

2. Bir uzayın sonlu sayıda bileşeni varsa, bu bileşenlerin her birisi hem açık hem kapalıdır. Ancak sonsuz bileşen varsa, bileşenlerin açık olması gerekmez. Bir örnekle doğrulayınız.

   ÇÖZÜM: Şu özelikleri biliyoruz.

   (a) Bir uzayın bileşenleri o uzayın bir ayrışımını oluşturur (Önerme 16.9.2).
   (b) Bir uzayın bileşenleri kapalıdır (Önerme 16.9.4).
   (c) Bir uzayın hem açık hem kapalı olan bağlantılı alt-kümesi o uzayın bir bileşenidir (önerme 16.9.5).

   $(X, \mathscr{T})$ uzayının sonlu sayıda bileşeni $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$ olsun. (a) gereğince bileşenler kesişmezler. (b) gereğince her A_i bileşeni kapalıdır. $A_1 = X - (A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n)$ olduğundan A_1 bileşeni açıktır. Benzer düşünüşle öteki bileşenlerin de açık olduğu gösterilebilir. Demek ki, sonlu sayıda bileşen varsa, bileşenlerin her birisi hem açık hem kapalıdır.

   Rasyonel sayılar kümesi, üzerindeki salt topolojiye göre tamamen bağlantısızdır;yani $(\mathbb{Q}, \mathscr{R}_Q)$ uzayı tamamen bağlantısız bir uzaydır. Her $x \in Q$ rasyonel sayısı için tek öğeli $\{x\}$ kümesi kapalıdır, ama açık değildir.

16.10 TAMAMEN BAĞLANTISIZ UZAYLAR

Tanım 16.10.1. Bir topolojik uzayın her x öğesinin bileşeni yalnızca $\{x\}$ kümesinden ibaret ise, bu uzaya tamamen bağlantısız bir uzaydır, denilir.

1. Ayrık uzaylar bağlantısız (tamamen bağlantısız) uzaylardır.

   ÇÖZÜM: $(X, \mathscr{A})$ ayrık bir uzay olsun. Uzay ayrık olduğundan, $A = \{x\}$ kümesi hem açık hem kapalıdır. Öyleyse $\{x\}$ kümesinin tümleyeni $B = X - \{x\}$ kümesi de hem açık hem kapalı olur. $X = A \cup B$ ve $A \cap B = \emptyset$ dir. Bu demektir ki, X kümesi boş olmayan ve kesişmeyen iki açık kümenin bileşimine eşittir. Teorem 16.2.1 (c)-(d) uyarınca $(X, \mathscr{A})$ uzayı bağlantısızdır.

Şimdi uzayın tamamen bağlantısız olduğunu gösterelim. Her $x \in X$ öğesinin bileşeninin (x noktasını içeren en büyük bağlantılı küme) tek öğeli $\{x\}$ kümesi olduğunu göstermeliyiz. Olmayana Ergi Yöntemini kullanacağız. x noktasının bileşenine S diyelim. S bileşeni tek öğeli $\{x\}$ kümesine eşit olmasın. Uzay ayrık olduğundan S bileşeni hem açık hem kapalıdır. $A = \{x\}$ kümesi hem açık hem kapalı olduğundan $D = S - \{x\}$ kümesi de hem açık hem kapalı olur. S alt uzayında $(A \cap S)$ ve $(D \cap S)$ kümeleri hem açık hem kapalıdır. Ayrıca $(A \cap S) \cap (D \cap S) = \emptyset$ dir. Öyleyse, S bileşeni boş olmayan ve kesişmeyen iki açık kümenin bileşimine eşit olmaktadır. Öyleyse bağlantılı olamaz. Bu çelişki olamayacağından, kabulümüz yanlıştır; yani x noktasının bileşeni tek öğeli $\{x\}$ kümesidir. Bu iş, her $x \in X$ için yapılabileceğinden, $(X, \mathscr{A})$ ayrık uzayı tamamen bağlantısızdır.

2. Salt topolojiye göre $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi tamamen bağlantısız bir uzaydır.

   Çözüm 1: Salt topolojiye göre $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi ayrık bir uzaydır. Yukarıdaki Problem (1) den istenen çıkar.

   Çözüm 2: Problem (1) kullanılmadan da çözüm yapılabilir. Her $m \in \mathbb{Z}$ tam sayısının bileşeninin (m sayısını içeren en büyük bağlantılı küme) tek öğeli $\{m\}$ kümesi olduğunu göstermeliyiz. Olmayana Ergi Yöntemini kullanacağız. m in bileşenine S diyelim. S bileşeni tek öğeli $\{m\}$ kümesine eşit değilse, başka bir $n \in S$ tam sayısını içerir. $m \neq n$ olduğundan birisi ötekinden küçüktür. $m < n$ kabul edelim. Her aralık tam olmayan sayılar içerir. Örneğin, $c \in (m, n)$ olan irrasyonel bir c sayısı seçelim. $m < c < n$ olacaktır. Şimdi $U = \{x : x < c\} \subset \mathbb{R}$ ve $V = \{x : x > c\} \subset \mathbb{R}$ kümelerini oluşturalım. U ve V kümeleri salt topolojiye göre $\mathbb{R}$ içinde açık kümelerdir. Öyleyse $U \cap S$ ve $V \cap S$ kümeleri S alt-uzayında açık kümelerdir. $m \in U \cap S$ olduğundan $U \cap S \neq \emptyset$ dir. Benzer olarak, $n \in V \cap S$ olduğundan $V \cap S \neq \emptyset$ dir. Ayrıca $S = (U \cap S) \cup (V \cap S)$ dir. S kümesi boş olmayan açık iki kümenin bileşimi olduğundan bağlantılı değildir. Oysa S kümesi m nin bileşeni idi; yani m noktasını içeren en büyük bağlantılı kümedir. Bu çelişki, S nin m den başka bir n öğesini içerdiğini kabul etmemiz nedeniyle oluştu. O halde m tam sayısının bileşeni tek öğeli $\{m\}$ kümesidir. Her tam sayı için bu özelik var olduğundan, Tanım 16.10.1 uyarınca, salt topolojiye göre $\mathbb{Z}$ irrasyonel sayılar kümesi tamamen bağlantısız bir uzaydır.

3. Salt topolojiye göre $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi tamamen bağlantısız bir uzaydır. Gösteriniz.

   Çözüm: Her $p \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayısının bileşeninin (p sayısını içeren en büyük bağlantılı küme) tek öğeli $\{p\}$ kümesi olduğunu göstermeliyiz. Olmayana Ergi Yöntemini kullanacağız. p nin bileşenine S diyelim. S bileşeni tek öğeli $\{p\}$ kümesine eşit değilse, başka bir $q \in S$ rasyonel sayısını içerir. $p \neq q$ olduğundan birisi ötekinden küçüktür. $p < q$ kabul edelim. Her aralık irrasyonel sayılar içerir. $c \in (p, q)$ olan irrasyonel bir c sayısı seçelim.

$p < c < q$ olacaktır. Şimdi $U = \{x : x < c\} \subset \mathbb{R}$ ve $V = \{x : x > c\} \subset \mathbb{R}$ kümelerini oluşturalım. U ve V kümeleri salt topolojiye göre $\mathbb{R}$ içinde açık kümelerdir. Öyleyse $U \cap S$ ve $V \cap S$ kümeleri S alt-uzayında açık kümelerdir. $p \in U \cap S$ olduğundan $U \cap S \neq \emptyset$ dir. Benzer olarak, $q \in V \cap S$ olduğundan $V \cap S \neq \emptyset$ dir. Ayrıca $S = (U \cap S) \cup (V \cap S)$ dir. S kümesi boş olmayan açık iki kümenin bileşimi olduğundan bağlantılı değildir. Oysa S kümesi p nin bileşeni idi; yani p noktasını içeren en büyük bağlantılı kümedir. Bu çelişki, S nin p den başka bir q öğesini içerdiğini kabul etmemiz nedeniyle oluştu. O halde p rasyonel sayısının bileşeni tek öğeli $\{p\}$ kümesidir. Her rasyonel sayı için bu özelik var olduğundan, Tanım 16.10.1 uyarınca, salt topolojiye göre $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi tamamen bağlantısız bir uzaydır.

4. Salt topolojiye göre $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi tamamen bağlantısız bir uzaydır. Gösteriniz.

   Çözüm: Çözüm yukarıdaki gibi yapılabilir. Her $x \in \mathbb{Q}'$ irrasyonel sayısının bileşeninin (x sayısını içeren en büyük bağlantılı küme) tek öğeli $\{x\}$ kümesi olduğunu göstermeliyiz. Olmayana Ergi Yöntemini kullanacağız. x in bileşenine S diyelim. S bileşeni tek öğeli $\{x\}$ kümesine eşit değilse, başka bir $y \in S$ irrasyonel sayısını içerir. $x \neq y$ olduğundan birisi ötekinden küçüktür. $x < y$ kabul edelim. Her aralık rasyonel sayılar içerir. $c \in (x, y)$ olan rasyonel bir c sayısı seçelim. $x < c < y$ olacaktır. Şimdi $U = \{t : t < c\} \subset \mathbb{R}$ ve $V = \{t : t > c\} \subset \mathbb{R}$ kümelerini oluşturalım. U ve V kümeleri salt topolojiye göre $\mathbb{R}$ içinde açık kümelerdir. Öyleyse $U \cap S$ ve $V \cap S$ kümeleri S alt-uzayında açık kümelerdir. $x \in U \cap S$ olduğundan $U \cap S \neq \emptyset$ dir. Benzer olarak, $y \in V \cap S$ olduğundan $V \cap S \neq \emptyset$ dir. Ayrıca $S = (U \cap S) \cup (V \cap S)$ dir. S kümesi boş olmayan açık iki kümenin bileşimi olduğundan bağlantılı değildir. Oysa S kümesi x nin bileşeni idi; yani x noktasını içeren en büyük bağlantılı kümedir. Bu çelişki, S nin x den başka bir y öğesini içerdiğini kabul etmemiz nedeniyle oluştu. O halde x irrasyonel sayısının bileşeni tek öğeli $\{x\}$ kümesidir. Her irrasyonel sayı için bu özelik var olduğundan, Tanım 16.10.1 uyarınca, salt topolojiye göre $\mathbb{Q}'$ irrasyonel sayılar kümesi tamamen bağlantısız bir uzaydır.

5. $(X, \mathscr{T})$ bağlantılı uzay olsun ve tek noktadan oluşmasın. Her $x \in X$ için $\{x\}$ kapalı ise X kümesi sonsuzdur. Gösteriniz.

   Çözüm: X sonlu olsun. $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ diyelim.

$$X = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \{x_3\} \cup \ldots \cup \{x_n\} \tag{16.7}$$

   dir. (16.7) eşitliğinin sağ yanı, kapalı kümelerden oluştuğu için kapalı bir kümedir. $\{x_1\}' = X - (\{x_2\} \cup \{x_3\} \cup \ldots \cup \{x_n\})$ dir ve açık bir kümedir. Şimdi $A = \{x_1\}$ ve $B = (\{x_2\} \cup \{x_3\} \cup \ldots \cup \{x_n\})$ diyelim. A ve B kapalı kümelerdir. Öyleyse (16.1) bağıntıları sağlanır. Dolayısıyla X bağlantısız olur. Bu çelişki olamayacağına göre, X sonlu değildir.