## 16.5 BAĞLANTILILILIĞIN KORUNUMU

**Önerme 16.5.1.** *Bağlantılı bir uzayın sürekli bir fonksiyon altındaki resmi de bağlantılıdır.*

## 16.6 BÖLÜM UZAYLARININ BAĞLANTILILIĞI

**Teorem 16.6.1.** *Bağlantılı bir uzayın her bölüm uzayı da bağlantılı bir uzaydır.*

### 16.6.1 Problem

1. $\varphi : X \to Y$ bir bölüm dönüşümü olsun. $Y$ bağlantılı ve her $y \in Y$ için $\varphi^1(y) \subset X$ bağlantılı ise, $X$ uzayının da bağlantılı olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: Olmayana Ergi Yöntemini kullanacağız. Verilen koşullar altında $X$ bağlantılı değilse, Önerme 16.2.1(e) uyarınca, hem açık hem kapalı has bir alt kümesi var olmalıdır. $A \subset X$ alt-kümesi hem açık hem kapalı olsun. Her $y \in Y$ için $\varphi^{-1}(y) \cap A$ kümesi $\varphi^1(y)$ kümesi içinde hem açık hem kapalıdır.

   $\varphi^{-1}(y)$ bağlantılı ise ya $\varphi^{-1}(y) \subset A$ dır ya da $\varphi^{-1}(y) \subset (X - A)$ dır. O halde, $\varphi(A) \cap \varphi(X - A) = \emptyset$ ve $\varphi^{-1}(\varphi(A)) \cap \varphi^{-1}(\varphi(X - A)) = \emptyset$ olur. Bu ise $A = \varphi^{-1}(\varphi(A))$ ve $X - A = \varphi^{-1}(\varphi(X - A))$ olmasını gerektirir. $\varphi$ bölüm dönşümü olduğu için, son sonuç $\varphi(A)$ nın $Y$ içinde hem açık hem kapalı olmasını gerektirir. Oysa $Y$ bağlantılıdır. Öyleyse ya $A = \emptyset$ ya da $A = X$ olmalıdır.

## 16.7 ÇARPIM UZAYLARIN BAĞLANTILILIĞI

**Teorem 16.7.1.** *Bir çarpım uzayın bağlantılı olması için gerekli ve yeterli koşul çarpan uzayların her birisinin bağlantılı olmasıdır.*

## 16.8 GERÇEL EKSENİN BAĞLANTILILIĞI

**Teorem 16.8.1.** $\mathbb{R}$ *gerçel sayılar kümesinin herhangi bir* $E$ *alt-kümenin salt topolojiye göre bağlantılı olması için gerekli ve yeterli koşul, bu kümenin bir aralık olmasıdır.*

### 16.8.1 Problemler

1. Bir noktası atılan bir çember bağlantılı mıdır? İki noktası atılan bir çember bağlantılı mıdır?

ÇÖZÜM: $(0,1)$ açık aralığından birim çember üzerine tanımlı $t \to (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ dönüşümü süreklidir. Önerme 16.5.1 uyarınca bir noktası atılan bir çember bağlantılıdır. Bunu başka türlü söylersek, bir noktası atılan çemberi yatay eksen üzerine düzgün serersek bir aralık elde ederiz. Her aralık bağlantılı bir kümedir.

Çemberden iki nokta atılırsa, yatay eksene serilmiş biçimi, kesişmeyen iki aralık halini alır. Kesişmeyen iki aralık bağlantısızdır.

2. A ile B bağlantılı iki küme olduğu halde

$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad \partial A, \quad A^\circ$$

kümeleri bağlantılı olmayabilir. Bunlara birer örnek veriniz.

ÇÖZÜM:

(a) $[0,1)$ ile $(2,3]$ bağlantılı kümelerdir. Ama $[0,1) \cup (2,3]$ bileşimi bağlantılı değildir.

(b) Düzlemde $A = \{(x,y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ birim karesi ile $Y = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0\}$ karesini düşünelim. Şimdi $Y$ karesinden $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ aralığını atarak $B = Y - \{(x,0) : \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\}$ kümesini tanımlayalım. $\mathbb{R}^2$ üzerindeki salt topolojiye göre $A$ ve $B$ kümelerinin her ikisi de bağlantılıdır. Ama bunların arakesiti $A \cap B = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ kümesidir. Bitişmeyen iki aralığın bileşimi olduğundan bu arakesit bağlantısızdır.

(c) $[0,1) \cup [1,2]$ kümesi bağlantılıdır. Ama bunun içi $([0,1) \cup [1,2])^o = (0,1) \cup (1,2)$ bağlantısızdır.

(d) $A = (0,1)$ bağlantılıdır, ama $\partial A = \{0,1\}$ kenarı bağlantısızdır.

3. Bağlantılılığın kalıtım özelliği yoktur, yani bağlantılı bir uzayın her alt uzayı da bağlantılı olmak zorunda değildir. Bunu bir örnekle gösteriniz.

ÇÖZÜM: Salt topolojiye göre gerçel sayılar kümesi bağlantılıdır (bkz Sonuç 16.8.1). Ama, örneğin, tamsayılar kümesi tamamen bağlantısız bir kümedir.

4. İrrasyonel sayılar kümesinin $\mathbb{R}$ içinde bağlantılı olmadığını gösteriniz.

ÇÖZÜM: İrrasyonel sayılar kümesini $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ile gösterelim. $A = \{x : x > 2\} \cap \mathbb{Q}'$ ile $B = \{x : x < 2\} \cap \mathbb{Q}'$ kümeleri salt topolojiye göre açıktır. Ayrıca $A \cap B = \emptyset$ ve $\mathbb{Q} = A \cup B$ dir. Demek ki irrasyonel sayılar kümesi boş olmayan ve kesişmeyen iki açık kümenin bileşimine eşittir. Dolayısıyla, Teorem 16.2.1(c) uyarınca bağlantısızdır.

$x$ irrasyonel bir sayı olsun. $(\mathbb{R}, \mathscr{R})$ uzayında (salt topolojiye göre), $x$ noktasının her $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ komşuluğu sonsuz sayıda rasyonel sayı içerir. O halde $\mathbb{Q}'$ irrasyonel sayılar kümesi üzerinde salt topolojinin kondurduğu $(\mathbb{Q}', \mathscr{R}_{Q'})$ alt uzayında $x$ noktasını içeren en büyük bağlantılı küme tek öğeli $\{x\}$ kümesidir. Tanım 16.10.1 uyarınca irrasyonel sayılar kümesi tamamen bağlantısızdır.

5. $A = \{x \mid (x = 0) \vee (x = 1/n), \quad n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin $\mathbb{R}$ içinde bağlantılı olmadığını gösteriniz.

   Çözüm 1: $A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ dizisi $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin bir alt kümesidir. $(\mathbb{Q}, \mathscr{R}_Q)$ alt uzayı tamamen bağlantısızdır. O halde, bunun $A$ alt kümesi de tamamen bağlantısız olacaktır.

   Çözüm 2: $A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ kümesini $A_1 = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n_0}\}$ ve $A_2 = \{\frac{1}{n} : n_0 < n\}$ diye iki kümeye ayıralım. $(\mathbb{Q}, \mathscr{R}_Q)$ alt uzayında $A_1$ ve $A_2$ açıktır ve $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ dir. Kesişmeyen ve boş olmayan iki açık kümenin bileşimi olduğu için $A$ kümesi bağlantısızdır.

6. Bağlantılı bir $X$ uzayından $\mathbb{R}$ ye sürekli bir fonksiyon varsa, $X$ kümesinin sayılamayan sonsuz bir küme olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: $f$ nin görüntü kümesi sonlu ise; yani $f(X) = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subset \mathbb{R}$ ise, salt topolojinin Hausdorff olma özeliği uyarınca, $y_1 \in V_1, y_2 \in V_2, \ldots, y_n \in V_n$ olacak biçimde açık kümeleri öyle seçebiliriz ki $V_i$ ler birbirlerinden ayrık olur. Bu açık kümelerin $f$ altındaki ters görüntüleri de birbirlerinden ayrık açık kümeler olacaktır; yani

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_i), \qquad \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(V_i) = \emptyset$$

   olur. Bu ise $X$ in bağlantılı olmasıyla çelişir. O halde $f(X) \subset \mathbb{R}$ görüntüsü sonlu olamaz.

   $f$ nin görüntü kümesi sayılabilir sonsuz ise; yani $f(X) = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ ise, $y_1 \in V_1, y_2 \in V_2, \ldots, y_n \in V_n, \ldots$ olacak biçimde açık kümeleri öyle seçebiliriz ki

$$X = V_1 \cup \left( \bigcup_{i=2}^{\infty} f^{-1}(V_i) \right), \qquad V_1 \cap \left( \bigcup_{i=2}^{\infty} f^{-1}(V_i) \right) = \emptyset$$

   olur. Bu durumda $X$ kümesi boş olmayan ve kesişmeyen açık iki kümenin bileşimi olur, ki bu $X$ in bağlantılı olmasıyla çelişir. O halde görüntü kümesi sayılabilir sonsuz olamaz.

   $f : X \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonunun görüntü kümesi sonlu ya da sayılabilir sonsuz olamayacağına göre $f(X)$ sayılamayan sonsuz bir kümedir. $cardinal(f(X)) \leq cardinal(X)$ olacağından, $X$ kümesi de sayılamayan sonsuz bir küme olmalıdır.