16.4 BAĞLANTILI KÜME

1. Gerçel sayılar kümesi, salt topolojiye göre bağlantılı bir kümedir.

   Çözüm: Bkz. Sonuç 16.8.1.

2. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi salt topolojiye göre bağlantılı değildir.

   Çözüm: $A = \{x : x > \sqrt{2}\} \cap \mathbb{Q}$ ile $B = \{x : x < \sqrt{2}\} \cap \mathbb{Q}$ kümeleri salt topolojiye göre açıktır. Ayrıca $A \cap B = \emptyset$ ve $\mathbb{Q} = A \cup B$ dir. Demek ki rasyonel sayılar kümesi boş olmayan ve kesişmeyen iki açık kümenin bileşimine eşittir. Dolayısıyla, Teorem 16.2.1(c) uyarınca bağlantısızdır.

3. Gerçel sayılar kümesi üst-limit topolojisine göre bağlantısızdır.

   Çözüm: Üst-limit topolojisi $\{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ yarı-açık aralıklarını taban kabul eden topolojidir. Bu topolojide $(a, b]$ nin tümleyeni olan

   $$R - (a, b] = (-\infty, a] \cup (b, +\infty) \tag{16.3}$$

   kümesi kapalıdır. Öte yandan

   $$(-\infty, a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a - n, a] \text{ ve } (b, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (b, b + n] \tag{16.4}$$

   yazılabilir. (16.4) ifadesindeki her iki bileşimi oluşturan kümeler açık olduğu için $(-\infty, a]$ ve $(b, +\infty)$ kümeleri açıktır. O halde, bunların $(-\infty, a] \cup (b, +\infty)$ bileşimi de açıktır. Öyleyse, bu küme üst-limit topolojisinde hem açık hem kapalı bir kümedir. Teorem 16.2.1(e) uyarınca, gerçel sayılar kümesi, üst limit topolojisine göre bağlantılı değildir.

4. Gerçel sayılar kümesi alt-limit topolojisine göre bağlantısızdır.

   Çözüm: Bunun ispatı yukarıdakine benzer. Alt-limit topolojisi $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ yarı-açık aralıklarını taban kabul eden topolojidir. Bu topolojide $[a, b)$ nin tümleyeni olan

   $$R - [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, +\infty) \tag{16.5}$$

   kümesi kapalıdır. Öte yandan

   $$(-\infty, a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a - n, a) \text{ ve } [b, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [b, b + n) \tag{16.6}$$

   yazılabilir. (16.6) ifadesindeki her iki bileşimi oluşturan kümeler açık olduğu için $(-\infty, a)$ ve $[b, +\infty)$ kümeleri açıktır. O halde, bunların $(-\infty, a) \cup [b, +\infty)$ bileşimi de açıktır. Öyleyse, bu küme alt-limit topolojisinde hem açık hem kapalı bir kümedir. Teorem 16.2.1(e) uyarınca, gerçel sayılar kümesi, alt-limit topolojisine göre bağlantılı değildir.

5. Bağlantılı kümelerden oluşan bir ailenin arakesiti bağlantılı olmayabilir. Bir örnekle gösteriniz.

   ÇÖZÜM: $I = [0,1]$ birim aralık olsun I^2 analitik düzlemdeki birim karedir. $Y = I^2 - \{(x,0) : \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \{(x,y) : y \leq \frac{1}{n}\}$ kümeler dizisini tanımlayalım. Bu kümeler iç-içedir: $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$
   $$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [1, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, 1]$$
   olduğu kolayca görülür. Eşitliğin sağındaki küme bitişmeyen iki aralığın bileşimidir; yani bağlantısızdır.

6. $K = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ dizisi veriliyor. Gerçel sayılar kümesi üzerinde
   $$\mathscr{B} = \{(a,b) - K : a, b \in \mathbb{R}\}$$
   ailesini taban kabul eden topolojiye $\mathscr{K}$ diyelim. $(\mathbb{R}, \mathscr{K})$ topolojik uzayı bağlantılıdır.

7. $(X, \mathscr{T}_1)$ ile $(X, \mathscr{T}_2)$ topolojik uzayları veriliyor.

   (a) $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$ ve $(X, \mathscr{T}_1)$ bağlantılı ise $(X, \mathscr{T}_2)$ bağlantılı mıdır?

   (b) $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$ ve $(X, \mathscr{T}_2)$ bağlantılı ise $(X, \mathscr{T}_1)$ bağlantılı mıdır?