Bölüm 16

BAĞLANTILI UZAYLAR

Bağlantılılık kavramı, gerçel eksendeki aralık kavramının genelleştirilmesidir.

16.1 İKİ KÜMENİN BAĞLANTILILIĞI

Tanım 16.1.1.

$$\bar{A} \cap B = \emptyset \quad ve \quad A \cap \bar{B} = \emptyset \tag{16.1}$$

ise A ile B kümeleri *bağlantısız* iki kümedir.

$$\bar{A} \cap B \neq \emptyset \quad ya \quad da \quad A \cap \bar{B} \neq \emptyset \tag{16.2}$$

ise, A ile B kümeleri *bağlantılı* iki kümedir.

Önerme 16.1.1. *Her ikisi de açık ya da her ikisi de kapalı olan ayrık iki küme bağlantısızdır.*

Önerme 16.1.2. *Eğer A ile B kümelerinin her ikisi de açık ya da her ikisi de kapalı ise $A - B$ ile $B - A$ kümeleri bağlantısızdır.*

Önerme 16.1.3. *Eğer $\bar{A} \cap B = \emptyset$ ve $A \cup B$ kapalı ise A kapalı bir kümedir.*

Önerme 16.1.4. *$A \cap \bar{B} = \emptyset$ ve $A \cup B$ açık ise A kümesi açıktır.*

Sonuç 16.1.1. *A ile B bağlantısız iki küme olsun. Eğer $A \cup B$ kapalı ise A ve B kapalıdır. Eğer $A \cup B$ açık ise A ve B açıktır.*

16.2 BAĞLANTILI UZAYLAR

16.2.1 Problemler

1. Sonsuz bir kümenin, üzerindeki sonlu tümleyenler topolojisine göre bağlantılı olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: Sonlu tümleyenler topolojisi ile donatılmış $(X, \mathscr{T})$ uzayı bağlantısız olsaydı $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ olacak biçimde boş olmayan açık A ve B kümeleri var olurdu. A' sonlu ve $A' \supset B$ olduğundan B nin sonlu olması gerekir. Öte yandan B açık olduğundan B' sonludur. O halde $X = B \cup B'$ sonlu olmalıdır, ki bu kabulümüze aykırıdır. O halde sonlu tümleyenler topolojisi ile donatılmış her uzay bağlantılı bir uzaydır.

2. Sayılamayan sonsuz bir kümenin, üzerinde sayılabilir tümleyenler topolojisine göre bağlantılı olup olmadığını gösteriniz.

   Çözüm: Sayılabilir tümleyenler topolojisi ile donatılmış $(X, \mathscr{T})$ uzayı bağlantısız olsaydı $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ olacak biçimde boş olmayan açık A ve B kümeleri var olurdu. A' sayılabilir ve $A' \supset B$ olduğundan B nin sayılabilir olması gerekir. Öte yandan B açık olduğundan B' sayılabilir. O halde $X = B \cup B'$ sayılabilir olmalıdır, ki bu kabulümüze aykırıdır. O halde sayılabilir tümleyenler topolojisi ile donatılmış sayılamaz sonsuz her uzay bağlantılı bir uzaydır.

3. Gerçel eksenin $(0, 1)$, $[0, 1)$ ve $(0, 1]$ alt uzaylarının birbirleriyle eşyapılı (homeomorphic) olamayacağını gösteriniz.

   Çözüm: Örnek olarak, $(0, 1]$ ve $(0, 1)$ uzaylarının eşyapılı olamayacağını gösterelim. Olmayana Ergi Yöntemini kullanacağız. $(0, 1]$ ve $(0, 1)$ uzaylarının eşyapılı olduğunu varsayalım. O zaman bir $f : (0, 1] \to (0, 1)$ eşyapı dönüşümü vardır. Her $x \in (0, 1]$ için $0 < f(x) < 1$ olduğu açıktır. f nin $(0, 1)$ açık aralığına kısıtlanmışına g diyelim; yani $g = f_{|_{(0,1)}}$ olsun. g süreklidir ve bağlantılı $(0, 1)$ aralığının g altındaki resmi bağlantılı olmalıdır. Oysa, $g : ((0, 1)) = (0, 1) - f(1)$ görüntüsü bağlantılı değildir. Çünkü, $(0, 1)$ aralığından $f(1)$ noktası atılmıştır. İçindeki bir noktası atılan hiç bir aralık bağlantılı değildir. Bu çatışkı olamayacağına göre kabulümüz yanlıştır. O halde, $(0, 1]$ ve $(0, 1)$ uzayları eşyapılı olamazlar.

   Diğerleri için de benzer yöntem uygulanabilir. □

4. $\mathbb{R}^n$ uzayının $\mathbb{R}$ uzayına eşyapılı (homeomorphic) olmadığını gösteriniz.

   Özel Hal: Özel olarak, $\mathbb{R}^2$ uzayının $\mathbb{R}$ uzayına eşyapılı olmadığını görmek için şöyle düşünelim. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eşyapı dönüşümü var olsun. $\mathbb{R}^2$ den her hangi bir a noktasını, $\mathbb{R}$ den de $f(a)$ noktasını atalım. f nin $(\mathbb{R}^2 - \{f(a))\}$ ye kısıtına g diyelim $g : (\mathbb{R}^2 - \{a\}) \to (\mathbb{R} - \{f(a)\})$ dönüşümü süreklidir. $(\mathbb{R}^2 - \{a\})$ bağlantılı olduğundan sürekli g fonksiyonu altındaki resmi de bağlantılı olmalıdır. Oysa, içinden noktası atılmış gerçel eksen; yani $\mathbb{R} - \{f(a)\}$ resmi bağlantı değildir. Bu çelişki olamayacağına göre, kabulümüz yanlıştır. O halde, $\mathbb{R}^2$ uzayı ile $\mathbb{R}$ uzayı eşyapılı değildirler.

   Genel Hal: $1 < n$ için $\mathbb{R}^n$ uzayı $\mathbb{R}$ uzayına eşyapılı olsaydı bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eşyapı dönüşümü var olurdu. O zaman f nin $(\mathbb{R}^n - \{a\})$ kümesine kısıtı olan $g : (\mathbb{R}^n - \{a\}) \to (\mathbb{R} - \{f(a)\})$ dönüşümü sürekli olur. $(\mathbb{R}^n - \{a\})$ bağlantılı olduğundan sürekli g fonksiyonu altındaki resmi de bağlantılı olmalıdır. Oysa, içinden noktası atılmış gerçel eksen; yani $\mathbb{R} - \{f(a)\}$ resmi bağlantı değildir. Bu çelişki olamayacağına göre, kabulümüz yanlıştır. O halde, $\mathbb{R}^n$ uzayı ile $\mathbb{R}$ uzayı eşyapılı değildirler.

5. (a) $f : [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonu sürekli ise, bir sabit noktasının olduğunu; yani $f(x) = x$ olan bir $x \in [0,1]$ olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: Bkz. Teorem 16.3.8.

   (b) $[0,1]$ kapalı aralığı yerine $[0,1)$ ya da $(0,1]$ yarı-açık aralıkları konulursa ne olur?

   Çözüm: $f : (0,1] \to (0,1]$ fonksiyonu sürekli ise, $x \to 0 \Rightarrow f(x) \to f(0)$ olduğundan f fonksiyonu $\bar{f} : [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonuna genişletilebilir. Bu genişlemiş fonksiyon sürekli olduğundan, (a) uyarınca $\bar{f}(c) = c$, $(c \in [0,1])$ gibi sabit bir nokta vardır. Eğer $c > 0$ ise bu nokta f nin bir sabit noktası olacaktır.

16.3 PROBLEMLER

1. $A = [0,1]$, $B = (1,2]$ kümeleri, salt topolojiye göre $\bar{A} \cap B = \emptyset$ ve $A \cap \bar{B} = \{1\} \neq \emptyset$ olduğundan bağlantılı iki kümedir.

2. $A = [0,1)$, $B = [1,2]$ kümeleri, salt topolojiye göre $\bar{A} \cap B = \{1\} \neq \emptyset$ ve $A \cap \bar{B} = \emptyset$ olduğundan bağlantılı iki kümedir.

3. $A = [0,1)$, $B = (1,2]$ kümeleri, salt topolojiye göre $\bar{A} \cap B = \emptyset$ ve $A \cap \bar{B} = \emptyset$ olduğundan bağlantısız iki kümedir.

4. $X = ((0,2) - \{1\})$ kümesi bağlantılı değildir. Çünkü $X = (0,1) \cup (1,2)$ kümesi kesişmeyen ve boş olmayan iki açık kümenin bileşimine eşittir.

5. Bağlantılılık kalıtsal (hereditary) bir özelik değildir. Çünkü bağlantılı bir uzayın alt-uzayı bağlantılı olmayabilir. Örneğin, gerçel eksen salt topolojiye göre bağlantılıdır, ama tamsayılar kümesi bağlantılı değildir.

6. Gerçel eksenin bir alt kümesinin bağlantılı olması için gerekli ve yeterli koşul bir aralık olmasıdır. $[a,b]$, $[a,b)$ ya da $(a,b]$ gibi kapalı ya da yarı açık aralıklar bağlantılı kümelerdir ve yalnızca bu tür alt kümeler bağlantılıdır (bkz. Teorem 16.8.1).

7. $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi salt topolojiye göre bağlantılıdır. Ama gerçel eksenden bir nokta atılırsa, geri kalan küme bağlantısız olur. Örneğin, başlangıç noktası atılmış gerçel eksen $\mathbb{R} - \{0\}$ bağlantısız bir kümedir.

8. Salt topolojiye göre analitik düzlem bağlantılıdır. Düzlemden bir nokta atılırsa, geri kalan küme bağlantılıdır; ama basit bağlantılı değildir.