Bölüm 15

TIKIZLIK

15.1 TIKIZ UZAYLAR

15.1.1 Problemler

1. Her sonlu topolojik uzay tıkızdır.

2. Ayrık bir topolojik uzayın tıkız olması için gerekli ve yeterli koşul sonlu olmasıdır.

3. Aynı bir küme üzerinde $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ koşulunu sağlayan iki topoloji verilsin. Eğer $(X, \mathscr{T})$ tıkız ise $(X, \mathscr{S})$ de tıkızdır.

   ÇÖZÜM: $(X, \mathscr{S})$ uzayının her açık örtüsü aynı zamanda $(X, \mathscr{T})$ uzayının da bir örtüsüdür. Tıkız olduğu için, bu örtünün, $(X, \mathscr{T})$ uzayında sonlu bir alt örtüsü vardır. Bu alt örtü, $(X, \mathscr{S})$ nin de sonlu bir örtüsüdür.

   Bunun karşıtı genel olarak geçersizdir. Örneğin, $[0, 1]$ aralığı üzerindeki salt topolojiye $\mathscr{S}$, ayrık topolojiye ise $\mathscr{A}$ diyelim. $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ dır. $([0, 1], \mathscr{S}$ nin tıkız olduğunu biliyoruz. Ama $([0, 1], \mathscr{A})$ tıkız değildir.

4. $(X, \mathscr{S})$ ve $(X, \mathscr{T})$ uzayları tıkız ise ya $\mathscr{S} = \mathscr{T}$ dir ya da mukayese edilemezler; yani birisi ötekinden ince ya da kaba değildir. *[Tıkız uzayın Hausdorff olduğunu kabul ediyoruz.]*

   ÇÖZÜM: $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ olduğunu varsayalım. $I : (X, \mathscr{T}) \to (X, \mathscr{S})$ özdeşlik dönüşümü bbö ve süreklidir. O halde bir topolojik eşyapı dönüşümüdür. Dolayısyla, $\mathscr{T} = \mathscr{S}$ olacaktır.

5. X sayılamaz sonsuz bir küme olsun Bu küme üzerinde

   $$\mathscr{C} = \{T : \text{ ya } T' \text{ sonludur ya da } T = X\} \tag{15.1}$$

   ailesi bir topolojidir. Buna Sayılabilir Tümleyenler Topolojisi denilir. Bir alt-kümenin bu topolojiye göre tıkız olması için sonlu olması gerekli ve yeterlidir.

ÇÖZÜM: Sonlu alt-kümelerin tıkız olacağı açıktır. Karşıt olarak, sonlu olmayan bir kümenin tıkız olamayacağını gösterelim. Her hangi bir $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ sayılabilir sonsuz kümesini düşünelim. Her $n = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ için $A_n = A' \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ kümesi açıktır; çünkü $A' \in \mathscr{C}$ ve $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \in \mathscr{C}$ dir.

Kolayca görüleceği gibi $A \subset \bigcup_{n=1}^{n} A_n$ dir; yani $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi A nın açık bir örtüsüdür. Bu örtüden sonlu bir alt-örtü seçilemez. O halde A tıkız değildir. Demek ki sayılabilr sonsuz kümeler, Sayılabilir Tümleyenler Topolojisine göre tıkız olamazlar.

Her sonsuz kümeden sayılabilir bir alt küme seçilebileceğine göre, sonsuz kümeler de Sayılabilir Tümleyenler Topolojisine göre tıkız olamazlar.

6. Bir X kümesi üzerinde bir Hausdorff topolojisi tıkız bir topolojiden daha kaba olamaz. (Başka bir deyişle bir X kümesi üzerinde tıkız bir topoloji bir Hausdorff topolojisinden ince olamaz.)

   ÇÖZÜM: $(X, \mathscr{T})$ tıkız uzay, $(Y, \mathscr{H})$ Hausdorf uzayı olmak üzere $\mathscr{H} \subset \mathscr{T}$ olduğunu varsayalım. Bu varsayım altında $\mathscr{H}' \subset \mathscr{T}'$ olacaktır; yani $\mathscr{H}$ topolojisinde kapalı olan her küme $\mathscr{T}$ topolojisinde de kapalı olmalıdır. Karşıt olarak $\mathscr{T}$ topolojisinde tıkız olan her küme $\mathscr{H}$ topolojisinde de tıkız olacaktır. Ayrıca, Teorem 15.1.4 uyarınca, tıkız bir uzayda bir alt kümenin tıkız olması için kapalı olması gerekli ve yeterlidir. Bütün bunları bir araya getirirsek şöyle diyebiliriz:

$$\begin{aligned} A \in \mathscr{T}' &\Rightarrow A \,\text{kümesi}\ \mathscr{T}\ \text{topolojisine göre tıkızdır} \\ &\Rightarrow A \,\text{kümesi}\ \mathscr{H}\ \text{topolojisine göre tıkızdır} \\ &\Rightarrow A \,\text{kümesi}\ \mathscr{H}\ \text{topolojisine göre kapalıdır} \\ &\Rightarrow A \in \mathscr{H}' \end{aligned}$$

   O halde $\mathscr{T}' \subset \mathscr{H}'$ dür; yani $\mathscr{T}$ topolojisinde kapalı olan her küme $\mathscr{H}$ topolojisinde de kapalıdır. Öyleyse $\mathscr{H} = \mathscr{T}$ olmalıdır.

7. $\overline{\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})} = \emptyset$ dir, ama $\overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{(\mathbb{R} - \mathbb{Q})} = \mathbb{R}$ dir.

8. $\mathbb{Q}$ uzayı ve $\mathbb{Q}^{'} = (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ uzayı ayrılabilir iki uzaydır. Dolayısıyla İkinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlarlar.

9. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ tamamen sınırlıdır, ama tıkız değildir.

15.1.2 PROBLEMLER

1. Gerçel eksenin açık ya da yarı-açık hiçbir aralığının tıkız olmadığını gösteriniz.

   Çözüm:

(a) $\{(-n,+n) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin açık bir örtüsüdür. Ama bu örtüden sonlu bir alt örtü seçilemez. Öyleyse, $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi tıkız değildir.

(b) $\{(\frac{1}{n},1) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi $(0,1)$ aralığının açık bir örtüsüdür. Ama bu örtüden sonlu bir alt örtü seçilemez. Öyleyse, $(0,1)$ açık aralığı tıkız değildir.

2. $(X,\mathscr{T})$ tıkız uzayında, tıkız iki alt-kümenin bileşiminin ve arakesitinin tıkız olduğunu gösteriniz.

   ÇÖZÜM: $(X,\mathscr{T})$ uzayını tıkız kabul etmekle onun Hausdorff olduğunu kabul ediyoruz. Teorem 15.1.3 uyarınca, tıkız uzayın tıkız alt kümeleri kapalıdır.

   $A,B \subset X$ alt kümeleri tıkız ise kapalıdırlar. O halde $A \cup B$ bileşimi ve $A \cap B$ arakesiti kapalı kümelerdir.

   $A \cup B$ bileşiminin bir açık örtüsü $\mathscr{U}$ olsun. $X - A \cup B$ açık olduğundan $\mathscr{U} \cup (X - A \cup B)$ ailesi X uzayının açık bir örtüsüdür. O halde sonlu bir alt örtüsü seçilebilir. Bu sonlu örtüden $X - A \cap B$ kümesini atarsak, geri kalan aile $A \cap B$ arakesitinin sonlu bir örtüsü olacaktır.

   $A \cap B$ arakesitinin tıkızlığını göstermek için de benzer düşünceyi uygulayabiliriz. $A \cap B$ arakesitinin bir açık örtüsü $\mathscr{V}$ olsun. $X - A \cap B$ açık olduğundan $\mathscr{V} \cup (X - A \cap B)$ ailesi X uzayının açık bir örtüsüdür. O halde sonlu bir alt örtüsü seçilebilir. Bu sonlu örtüden $X - A \cap B$ kümesini atarsak, geri kalan aile $A \cap B$ arakesitinin sonlu bir örtüsü olacaktır.

   UYARI: Bu kitapta tıkızımsı (quasicompact) Hausdorff uzaylarına tıkız (compact) uzay diyoruz. Bazı kaynaklar, Hausdorff olma koşulunu koymaz. O durumda, yukarıdaki ispat geçersiz olur; çünkü tıkız alt-kümelerin kapalı olması ancak Hausdorff uzaylarında geçerlidir.

3. Sonsuz bir küme, kendi üzerindeki *Sonlu Tümleyenler Topolojisine* göre tıkızdır. Neden?

   ÇÖZÜM: $(X,\mathscr{S})$ sonlu tümleyenler (cofinite) topolojisi olsun. $\mathscr{O} = \{U_\imath : U_\imath \in \mathscr{S}, \imath \in I\}$ bir açık örtü olsun. Bu örtüden rasgele bir $U_0 \in \mathscr{O}$ açık kümesini seçelim. Bunun tümleyeni sonludur; yani $U_0^{'} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olur. $U_0^{'}$ tümleyenine ait her x_i noktasını içeren bir $U_i \in \mathscr{O}$ seçilebilir. Böylece, $X = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$ olacaktır. $\square$

4. Ayrık topolojiye göre bir kümenin tıkız olması için gerekli ve yeterli koşul sonlu olmasıdır. Neden?

   ÇÖZÜM: $(X,\mathscr{A})$ ayrık uzay olsun. Her $x \in X$ için tek öğeli $\{x\}$ kümesi açıktır. O halde, $X = \bigcup\{\{x\} : x \in X\}$ olduğundan $\mathscr{O} = \{\{x\} : x \in X\}$ açık bir örtüdür. Bu örtüden sonlu bir alt örtü seçilebilmesi için X kümesinin sonlu olması gerekli ve yeterlidir.

5. Sayılabilir Tümleyenler Topolojisine göre bir alt-kümenin tıkız olması için gerekli ve yeterli koşul sonlu olmasıdır. Neden?

Çözüm: $(X, \mathscr{T})$ uzayı verilsin. $\mathscr{T}$ nin Sayılabilir Tümleyenler Topolojisi olduğunu varsayalım. X içindeki sonlu alt-kümelerin tıkız olacağı açıktır. Karşıt olarak, sonlu olmayan bir kümenin tıkız olamayacağını gösterelim. Her hangi bir $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ sayılabilir sonsuz kümesini düşünelim. Her $n = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ için $A_n = A' \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ kümesi açıktır; çünkü $A' \in \mathscr{C}$ ve $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \in \mathscr{C}$ dir.

Kolayca görüleceği gibi $A \subset \bigcup_{n=1}^{n} A_n$ dir; yani $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi A nın açık bir örtüsüdür. Bu örtüden sonlu bir alt-örtü seçilemez. O halde A tıkız değildir. Demek ki sayılabilr sonsuz kümeler, Sayılabilir Tümleyenler Topolojisine göre tıkız olamazlar.

Her sonsuz kümeden sayılabilir bir alt küme seçilebileceğine göre, sonsuz kümeler de Sayılabilir Tümleyenler Topolojisine göre tıkız olamazlar.

6. Tıkız bir uzaydan bir Hausdorff uzayı üzerine tanımlı bire-bir sürekli bir fonksiyonun bir topolojik eşyapı dönüşümü olacağını gösteriniz.

   Çözüm: $(X, \mathscr{T}$ tıkız uzay, $(Y, \mathscr{H})$ Hausdorf uzayı ve $f : X \to Y$ fonksiyonu sürekli ve bbö olsun.

$$f^{-1}(\mathscr{H}) = \{f^{-1}(H) : H \in \mathscr{H}\}$$

   ailesi X üzerinde bir topolojidir (bkz. Ters resim topolojisi, izdüşel topoloji, projective topoloji). İzdüşel topoloji, f yi sürekli kılan en kaba topoloji olduğundan

$$f^{-1}(\mathscr{H}) \subset \mathscr{T}$$

   dir. Öte yandan, X kümesi üzerindeki bir Hausdorff topolojisi bir tıkız topolojiden kaba olamaz (bkz 15.1.1(1) Problem). O halde

$$f^{-1}(\mathscr{H}) = \mathscr{T}$$

   dir. Bu ise $f^{-1} : Y \to X$ ters fonksiyonunun da sürekli olması demektir. Öyleyse, Önerme 2.1.1 uyarınca f bir eşyapı dönüşümüdür.

15.2 YEREL TIKIZ UZAYLAR

15.3 KARMA PROBLEMLER

1. $(X, \mathscr{T})$ tıkız ve $(Y, \mathscr{H})$ Hausdorff ise sürekli $f :\to Y$ fonksiyonu kapalıdır. Gösteriniz.

   Çözüm: $A \in \mathscr{T}'$ ise A kümesi $\mathscr{T}'$ ye göre tıkızdır. O halde sürekli fonksiyon altındaki resmi $f(A) \subset Y$ tıkızdır. $(Y, \mathscr{H})$ Hausdorff olduğundan $f(A) \subset Y$ kapalıdır.

2. Y tıkız ise $\pi_1 : X \times Y \to X$ izdüşümü kapalı bir dönüşümdür. Gösteriniz.

   Çözüm: $(Y, \mathscr{Y})$ tıkız bir uzay olsun. Çarpım topolojisini $(X \times Y, \mathscr{P})$ ile gösterelim. $A \subset X \times Y$ kapalı ise $X - \pi_1(A)$ nın X içinde açık olduğunu göstermeliyiz. Bir $x \in X - \pi_1(A)$ öğesini düşünelim. Her y için $(x, y) \notin A$ dır. A kapalı olduğundan $X \times Y - A$ açıktır. Öyleyse her y için öyle bir $U_{xy} \in \mathscr{B}(x)$ ve $V_y \in \mathscr{B}(y)$ komşulukları vardır ki $(x, y) \in U_{xy} \times V_y \subset X \times Y - A$ olacaktır. Bu durumda $\{V_y : y \in Y\}$ ailesi Y nin bir açık örtüsü olur. Y tıkız olduğundan bunun sonlu bir alt örtüsü vardır. Bu sonlu örtüye $\{V_{y_i} : i = 1, 2, \ldots, n\}$ diyelim. Şimdi

$$U = U_{xy_1} \cap U_{xy_2} \cap \ldots \cap U_{xy_n}$$

kümesini tanımlayalım. $U \in \mathscr{B}(x)$ ve $U \times Y \subset X \times Y - A$ olacaktır. $U \cap \pi_1(A) = \emptyset$ dir. Her $x \in X - \pi_1(A)$ için bu yapılabileceğine göre $X - \pi_1(A)$ nın X içinde açık olduğu ortaya çıkar.

Çarpım topolojisi izdüşüm fonksiyonlarını sürekli kılan en kaba dokulu topolojidir (bkz. Örnek 8.1.1). Çarpım topolojisini $X \times Y$, $\mathscr{P}$ ile gösterelim. Yukarıdaki düşünüşle,

$$pi_2^{-1}(\mathscr{Y}) \subset \mathscr{P}$$

bağıntısının varlığını söyleyebiliriz.

Tabii $pi_2^{-1}(\mathscr{Y})$ topolojisi tıkızdır. $K \subset Y$ kümesi tıkız ise $pi_2^{-1}(K)$ kümesi $pi_2^{-1}(\mathscr{Y})$ topolojisine göre tıkız olacaktır. O halde aynı topolojiye göre kapalıdır. Öyleyse $\mathscr{P}$ topolojisine gör de kapalı olur. Öte yandan $\pi_2 o pi_2^{-1}(K) = K$ dır.

3. Y tıkız ve hausdorff ise $f : X \to Y$ dönüşümünün sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

grafiğinin $X \times Y$ içinde kapalı olmasıdır.

Çözüm:

`Yeterliği:` G' nün açık olduğunu göstermeliyiz. $(x, y) \notin G$ ise $y \neq f(x)$ dir. Y Hausdorff olduğundan y ile $f(x)$ noktalarının kesişmeyen birer komşuluğu vardır. Bunları $y \in\in \mathscr{B}(y)$ ve $f(x) \in W \in \mathscr{B}(f(x))$ ile gösterelim. f sürekli olduğundan $f(U) \subset W \subset (Y - V)$ olacak biçimde bir $x \in U \in \mathscr{B}(x)$ komşuluğu vardır. Buradan $(x, y) \in U \times V \cap G = \emptyset$ olduğu görülür. Her $(x, y) \notin G$ için bu özelik var olduğuna göre G' açıktır.

`Gerekliği:` $G \subset X \times Y$ grafiği kapalı olsun. $V \in \mathscr{B}(f(x))$ ise $G \cap (X \times (Y - V)) \in X \times Y$ kapalıdır. Önceki problem gereğince, $\pi_1[G \cap (X \times (Y - V)) \subset X$ kapalıdır ve x noktasını içermez. $f(U) \cap (Y - V = \emptyset$ olan bir $x \in U \in \mathscr{B}(x)$ komşuluğu seçelim. $f(U) \subset V$ dir. O halde f fonksiyonu x noktasında süreklidir. Her x için bu özelik var olduğundan, f fonksiyonu tanım bölgesinde süreklidir.

4. $f : X \to Y$ dönüşümü kapalı, sürekli ve örten olsun ve her $y \in Y$ için $f^{-1}(\{y\}) \subset X$ tıkız olsun. Eğer Y tıkız ise, X uzayının da tıkız olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: $\mathscr{U}$ ailesi X kümesinin açık bir örtüsü olsun. Simgelerde basitliği sağlamak için, her $y \in Y$ öğesinin f altındaki ters görüntüsünü A_y ile gösterelim; yani $f^{-1}(y) = A_y$ olsun. $\mathscr{U}$ ailesi A_y nin de açık bir örtüsüdür. A_y tıkız olduğundan $\mathscr{U}$ örtüsünden sonlu bir alt örtü seçilebilir. Bu alt-örtü $\{U_{y1}, U_{y2}, \ldots, U_{yn}\}$ olsun. $U_y = U_{y1} \cup U_{y2} \cup \ldots \cup U_{yn}$ diyelim ve $W_y = Y - f(X - U_y)$ kümesini tanımlayalım. $(X - U_y)$ kapalıdır. f kapalı bir fonksiyon olduğundan $f(X - U_y)$ görüntüsü de kapalıdır.

Şimdi şu özelikleri kolayca görebiliriz.

(a) W_y kümesi açıktır.

(b) $y \in W_y \Rightarrow f^{-1}(y) = A_y \subset U_y \Rightarrow y \notin f(X - U_y)$

(c) $f^{-1}(W_y) = f^{-1}[Y - f(X - U_y)] = X - f^{-1}(f(X - U_y)) = X - (X - U_y) = U_y$

Buradan görüldüğü gibi $\mathscr{Y} = \{W_y : y \in Y$ ailesi Y kümesinin bir açık örtüsüdür. Y tıkız olduğundan $\mathscr{Y}$ örtüsünün sonlu bir alt-örtüsü vardır. Bu snlu örtüye $\{W_{y1}, W_{y2}, \ldots, W_{ym}\}$ diyelim. Şimdi (c) bağıntısını kullanırsak,

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{m} W_{yi}\right) = \bigcup_{i=1}^{m} f^{-1}(W_{yi}) \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{yi}$$

En sağdaki U_{yi} kümelerinin her birisi sonlu sayıda $U \in \mathscr{U}$ nın bileşimi idi. O halde, X kümesi sonlu sayıda $U \in \mathscr{U}$ kümesiyle örtülebilir. Demek ki X tıkızdır.

5. Her açık aralık salt topolojiye göre $\mathbb{R}$ uzayında açıktır. Gösteriniz.

ÇÖZÜM:

1.Yol: Açık aralıklar ailesi salt topolojinin bir tabanıdır; dolayısıyla açık aralıklar salt topolojide açıktır.

2.Yol: $(a, b) \subset \mathbb{R}$ verilsin. Bir $x_0 \in (a, b)$ noktası alalım. $\epsilon < \min\{|x_0 - a|, |b - x_0|\}$ olmak üzere, $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (a, b)$ dir. Ayrıca, $(x - \epsilon, x + \epsilon) \in \mathscr{B}(x_0)$ dır; yani, x_0 noktasının bir komşuluğu (a, b) tarafından kapsanıyor. Her $x_0 \in (a, b)$ noktası için bu özelik var olduğundan, Önerme 5.1.1 uyarınca, (a, b) aralığı açık bir kümedir.

6. $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(n, n + 1)$ aralıklarının bileşimi açıktır. Gösteriniz.

ÇÖZÜM: $(n, n + 1)$ aralıkları salt topolojide açıktır. Açık kümelerin her bileşimi açık olduğundan $\bigcup\{(n, n + 1) : n \in \mathbb{N}\}$ salt topolojide açık bir kümedir.

7.

$$\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \tag{15.2}$$

eşitliğini kullanarak sonsuz sayıda açık kümelerin arakesitinin açık olmayabileceğini gösteriniz.

ÇÖZÜM: Her $n = 1, 2, 3, \ldots$ için $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ aralıkları açıktır. Ama bunların (15.2) arakesiti yalnızca noktasından ibaret $\{0\}$ kümesidir. Bu küme salt topolojiye göre kapalıdır. Demek ki açık kümelerin sonsuz tanesinin arakesiti açık olmayabiliyor.

8. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin, salt topolojiye göre $\mathbb{R}$ uzayında ne açık ne de kapalı olduğunu gösteriniz.

   ÇÖZÜM: Gerçel sayıların her aralığı sonsuz sayıda rasyonel ve irrasyonel sayılar içerir. Başka bir deyişle, salt topolojiye göre $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ uzayında yoğundur (bkz Önerme 4.1.9). Benzer olarak, salt topolojiye göre $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ irrasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ uzayında yoğundur. Dolayısıyla, salt topolojinin tabanına ait açık aralıklar $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi içinde kalmaz. O halde $\mathbb{Q}$ nun hiç bir iç noktası yoktur. Hiç bir dış noktası da yoktur. Her rasyonel sayı $\mathbb{Q}$ nin bir kenar noktasıdır. Benzer şey irrasyonel sayılar için de geçerlidir.

9. Salt topolojiye göre $\mathbb{R}$ uzayında bir (a, b) açık aralığının her $x \in (a, b)$ öğesi için bir komşuluk olduğunu gösteriniz.

   ÇÖZÜM: Problem 5 çözülürken gösterildi.

10. $$(0, 1) = \bigcup_{n=2}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] \tag{15.3}$$

    olduğunu gösteriniz. Buradan şu sonucu çıkarınız: Sonsuz sayıda kapalı kümelerin bileşimi kapalı olmayabilir.

    ÇÖZÜM: Simgelerde basitliği sağlamak için, (15.3) bağıntısının sağ yanını A ile gösterelim. $(0, 1) = A$ olduğunu göstermek için iki kümenin birbirini kapsadığını göstermeliyiz.

    $(0, 1) \supset A$ olduğu apaçıktır. Çünkü, her $x \in A$ için $x \in [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ olan bir aralık vardır. O halde $0 < x < 1$ olacaktır. O halde $x \in (0, 1)$ olur.

    Karşıt olarak, $x \in (0, 1)$ olsun. Arşimet kuralı uyarınca $\frac{1}{n} < x < 1 - \frac{1}{n}$ olacak şekilde bir n doğal sayısı vardır. O halde, $x \in [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ olur. Dolayısıyla $x \in A$ olur.

    A kümesini oluşturan bileşime ait $[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ aralıklarının hepsi kapalıdır. Ama eşitliğin solundaki $(0, 1)$ aralığı açıktır. Demek ki kapalı aralıkların sonsuz sayıdasının bileşimi kapalı olmayabiliyor.