Bölüm 14

AYIRMA AKSİYOMLARI

14.1 T_o -UZAYLARI

Tanım 14.1.1. Bir $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayı verilsin. X kümesinin farklı iki noktası verildiğinde, bu noktalardan en az birisinin, diğerini içermeyen bir komşuluğu varsa, $(X, \mathscr{T})$ uzayına bir T_0 *-uzayıdır* denilir.

14.2 T_1 -UZAYLARI

Tanım 14.2.1. Bir $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayının herhangi farklı iki noktası verildiğinde, bu noktaların herbirisinin, diğerini içermeyen bir komşuluğu varsa, bu uzaya bir T_1 *-uzayıdır*, denilir.

1. Sonlu tümleyenler topolojisinin her alt-uzayı da sonlu tümleyenler topolojisidir; yani kalıtım özeliği vardır. Gösteriniz.
2. Sonlu Tümleyenler Topolojisi bir Hausdorff topolojisi değildir (Bkz. Problem 14.9.1(6).
3. Sonlu Tümleyenler Topolojisi düzenli bir topoloji değildir (Bkz. Problem 14.9.1(6)
4. Sonlu Tümleyenler Topolojisi normal bir topoloji değildir (Bkz. Problem 14.9.1(6).

14.3 T_2 -UZAYLARI

HAUSDORFF UZAYLARI

Tanım 14.3.1. Bir $(X, \mathscr{T})$ uzayının herhangi farklı iki noktası verildiğinde bu noktaların birbirlerinden ayrık birer komşuluğu varsa, $(X, \mathscr{T})$ uzayına bir T_2 -uzayıdır ya da bir *Hausdorff uzayıdır*, denilir.

14.4 DÜZENLİ UZAYLAR

Tanım 14.4.1. Kapalı bir K alt-kümesi ile bir $x \notin K$ noktası verildiğinde, K kümesi ile x noktasının birbirlerinden ayrık birer komşuluğu varsa $(X, \mathscr{T})$ uzayı düzenli bir uzaydır.

14.5 T_3 -UZAYLARI

Tanım 14.5.1. Düzenli ve T_1 olan bir $(X, \mathscr{T})$ uzayına bir T_3-*uzayıdır*, denilir:

14.6 BÜSBÜTÜN DÜZENLİ UZAYLAR

Tanım 14.6.1. Bir $(X, \mathscr{T})$ uzayı verilsin. Kapalı bir $A \subset X$ alt kümesi ile bir $x \in A$ noktası verildiğinde eğer X kümesinden gerçel eksen üzerindeki salt topolojinin $[0, 1]$ alt-uzayı üzerine aşağıdaki koşulları sağlayan sürekli bir f fonksiyonu varsa, $(X, \mathscr{T})$ uzayına *büsbütün düzenli uzaydır* denilir:

$$f : X \to [0, 1],\ f(A) = 1, f(x) = 0$$

Böyle bir fonksiyona A kümesi ile x noktasını *ayırıyor* denilir.

14.7 NORMAL UZAYLAR

Tanım 14.7.1. Birbirlerinden ayrık herhangi iki kapalı alt kümesinin, birbirlerinden ayrık birer komşulukları varsa $(X, \mathscr{T})$ uzayına *normal uzay*, denilir.

14.8 T_4 -UZAYLARI

Tanım 14.8.1. Normaldir ve $[T_1]$ olan $(X, \mathscr{T})$ uzayına bir T_4 -uzayıdır,denilir.

14.9 G_δ ve F_σ Kümeleri

Tanım 14.9.1. Bir topolojik uzayda sayılabilir sayıda açık kümelerin arakesiti olan kümelere G_δ -kümesi denilir.

Tanım 14.9.2. Bir topolojik uzayda sayılabilir sayıda kapalı kümelerin bileşimi olan kümelere F_σ -kümesi denilir.

14.9.1 Problemler

1. $\mathbb{R}^2$ üzerinde aşağıdaki $\mathscr{T}$ topolojik yapısını kuralım: Bir $(x_0\ y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktasının komşuluklar ailesi, bir $|x - x_0| < \epsilon, \quad \epsilon > 0$, şeridini kapsayan bütün kümeler olarak tanımlansın. Komşuluk aksiyomlarının sağlandığını

ve dolayısıyla $\mathbb{R}^2$ üzerinde bu yolla tanımlanan bir $\mathscr{T}$ topolojisinin var olduğunu görünüz.

Çözüm: Her $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ noktasına karşılık $\mathscr{B}((x_0, y_0)) = \{(x, y) : |x - x_0| < \epsilon, \epsilon > 0\}$ ailesi veriliyor. Bu ailenin P_0 noktası için bir komşuluklar sistemi olduğunu göstermeliyiz. Verilen aileye ait kümeler, yatay eksende yer alan $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ açık aralıklarından geçen düşey şeritlerdir. Bu ailenin Önerme 5.1.2 ile verilen [N1]-[N4] komşuluk aksiyomlarını sağladığı kolayca görülebilir. □

(a) $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$ uzayı $T_i (i = 1, 2, 3, 4)$ uzaylarından bir sınıfa ait midir?

Çözüm: Hayır. Bu yolla $\mathbb{R}^2$ üzerinde kurulan $\mathscr{T}$) topolojisi $T_i (i = 1, 2, 3, 4)$ ayırma belitlerinden hiç birisini sağlamaz; başka bir deyişle $\mathscr{T}$) topolojisine ait açık kümelerle uzayın noktaları birbirlerinden ayrılamaz.

(b) Bu uzayda bir (x, y) noktasından ibaret küme kapalı mıdır? Hayır. Çünkü $\{(x, y)\}'$ kümesi açık değildir.

2. Bir Hausdorff uzayında bir dizinin en çok bir limitinin olabileceğini gösteriniz.

Çözüm: Olmayana Ergi Yöntemini kullanacağız. Bir (a_n) dizisinin farklı a ve b noktalarına yakınsadığını varsayalım. $a \neq b$ ve uzay Hausdorff olduğundan, bu iki noktanın birbirleriyle kesişmeyen birer komşuğu vardır:

$$G, H \in \mathscr{T}, a \in G, b \in H, G \cap H = \emptyset$$

Varsayım uyarınca

$$a_n \to a \Leftrightarrow (\exists n_0)(n_a < n \Rightarrow a_n \in G) \tag{14.1}$$
$$a_n \to b \Leftrightarrow (\exists n_0)(n_b < n \Rightarrow a_n \in G) \tag{14.2}$$

olacaktır. Bu durumda

$$\max n_a, n_b < n \Rightarrow \begin{cases} a_n \in G \\ a_n \in H \end{cases} \tag{14.3}$$

olmalıdır. $G \cap H = \emptyset$ olduğundan, bu bir çatışkıdır. Bu çatışkıyı yaratan varsayımımız; yani dizinin farklı iki limite yakınsadığı kabulümüz yanlıştır.

3. Bir Hausdorff uzayında bir A kümesinin bir yığılma noktasının her komşuluğu A ya ait sonsuz noktayı içerir.

Çözüm: Eğer içerilen noktaların sayısı sonlu olsaydı, yığılma noktasını ötekilerin hepsinden ayıran, dolayısıyla A kümesine ait hiç bir noktayı içermeyen bir komşuluk var olurdu. Bu ise, yığılma noktası olmasıyla çatışkıya girer. *qed*

4. Bir küme üzerinde en kaba T_1-topolojisinin sonlu tümleyenler topolojisi olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: $(X; \mathscr{S})$ sonlu tümleyenler topolojisi olsun. X üzerindeki bütün T_1-topolojilerinin arakesitini $\mathscr{I}$ ile gesterelim; yani

   $$\mathscr{I} = \bigcap \{\mathscr{T} : \mathscr{T} \text{ uzayı } T_1\text{-dir}\}$$

   $\mathscr{I}$ topolojisi X üzerindeki en kaba T_1-topolojisidir. Sonuç 14.2.1 uyarınca $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ dir. Öte yandan, her $x \in X$ için $\{x\}' \in \mathscr{S}$ dir. Dolayısıyla tek öğeli $\{x\}$ kümesi $(X; \mathscr{S})$ uzayında kapalıdır. Teorem 14.2.1 gereğince $\mathscr{S}$ topolojisi T_1-dir. Öyleyse $\mathscr{I} \subset \mathscr{S}$ olmalıdır. $\square$

5. Her sonlu T_1-uzayının ayrık olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: X sonlu ve $(X; \mathscr{S})$ sonlu tümleyenler topolojisi ise, tek öğeli her $\{x\} \subset X$ kümesi için $\{x\}'$ tümleyeni sonludur. Öyleyse $\{x\} \in \mathscr{S}$ dir. Her noktası açık bir küme oluşturduğundan $(X; \mathscr{S})$ ayrık bir uzaydır.

6. Sonsuz bir küme üzerindeki Sonlu Tümleyenler Topolojisinin bir Hausdorff topolojisi olmadığını gösteriniz.

   Çözüm: $(X; \mathscr{S})$ sonlu tümleyenler topolojisi olsun. $a, b \in X$ ve $a \neq b$ için $a \in T_a \in \mathscr{S}$, $b \in T_b \in \mathscr{S}$ ve $T_a \cap T_b = \emptyset$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $(T_a \cap T_b)' = T_a^{'} \cup T_b^{'} = X$ olmalıdır ki bu X kümesinin sonlu olmasını gerektirir. Çelişki. O halde $a, b \in X$ noktalarının kesişmeyen iki komşuluğu olamaz; yani sonsuz bir küme üzerindeki Sonlu Tümleyenler Topolojisi bir Hausdorff topolojisi olamaz.

   Sonuç: Sonlu Tümleyenler Topolojisinin bir T_1-topolojisi olduğunu ve bu topolojide her noktanın kapalı bir küme oluşturduğunu düşünerek, yukarıdaki düşünüşle, aşağıdaki özelikleri hemen söyleyebiliriz:

   (a) Sonlu Tümleyenler Topolojisi düzenli bir topoloji değildir.

   (b) Sonlu Tümleyenler Topolojisi normal bir topoloji değildir.

7. Bir T_1-uzayının sonlu bir alt-kümesinin bir yığılma noktasının olmayacağını gösteriniz.

Çözüm: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset X$ sonlu bir alt-küme ve $(X; \mathscr{T})$ bir T_1-uzayı olsun. Her hangi bir T_1-uzayında her nokta kapalıdır. Sonlu tane noktanın bileşimi olduğundan A kümesi kapalıdır. Öyleyse A kümesi (varsa) kendisine ait bütün yığılma noktalarını içerir. Bundan bir noktayı atalım. Örneğin $B = A - \{a_1\} = \{a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ diyelim. Sonlu sayıda noktadan oluştuğu için B kümesi de kapalıdır ve (varsa) kendisine ait bütün yığılma noktalarını içerir. B' açıktır ve $a_1 \in B'$ dür. $(A - \{a_1\}) \cap B' = \emptyset$ olduğundan a_1 noktası A kümesinin bir yığılma noktası olamaz. Geri kalan $\{a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ noktaları için de aynı şey söylenebilir. O halde A nın hiç bir yığılma noktası yoktur.

8. Bir T_1 uzayının her alt-uzayı da bir T_1 uzayıdır; yani kalıtım özeliği vardır. Gösteriniz.

Çözüm: $(X; \mathscr{T})$ bir T_1-uzayı ve $(A, \mathscr{T}_A)$ bir alt-uzay olsun. Teorem 14.2.1 uyarınca, A nın tek öğeli her $\{p\}$ kümesinin kapalı olduğunu göstermek yetecektir. Bunun için $A - \{p\}$ nin açık olduğunu göstereceğiz. $(X; \mathscr{T})$ bir T_1-uzayı olduğundan $X - \{p\}$ açıktır. Öte yandan

$$p \in A \subset X \Rightarrow A \cap (X - \{p\}) = A - \{p\}$$

dir. $(A, \mathscr{T}_A)$ alt uzayının açık kümeleri A nın $\mathscr{T}$ topolojisine (üst uzaya) ait açık kümelerle arakesidir. O halde, $A - \{p\}$ açıktır. □

9. Düzenli bir uzayın her alt-uzayı da düzenlidir; yani kalıtım özeliği vardır. Gösteriniz.

Çözüm: $(X; \mathscr{T})$ düzenli bir uzay ve $(A; \mathscr{T}_A)$ bir alt-uzay olsun. Alt uzaya ait kapalı bir küme ve onun dışında bir nokta verildiğinde, kesişmeyen birer komşuluklarının varlığını göstermeliyiz. $p \in A$ noktası ile kapalı bir $K \subset A$ kümesi $p \notin K$ koşulunu sağlasın. K kümesi $\mathscr{T}_A$ topolojisine göre kapalı olduğundan T_A topolojisine göre kaplamına eşittir. Bunu simgelerle şöyle gösterelim. $K = \overline{K}^{\mathscr{A}_A}$. Alt uzaydaki kapalı kümeler A ile üst uzaydaki kapalı kümelerin arakesitine eşit olduğu için K nın alt uzaydaki kaplamı K nın üst uzaydaki kaplamı ile A nın arakesitine eşittir; yani

$$K = \overline{K}^{\mathscr{A}_A} = A \cap \overline{K}^{\mathscr{T}}$$

dir. O halde, simgelerde basitliği sağlamak için kaplama işleminin hangi topolojiye göre olduğunu belirtmeyebiliriz. $(X; \mathscr{T})$ düzenli olduğundan

$$(\exists G, H \in \mathscr{T})(\bar{K} \subset G, p \in H, G \cap H = \emptyset$$

olur.$(A \cap G)$ ve $(A \cap H)$ kümeleri $\mathscr{T}_A$ alt-uzay topolojisine göre açıktır.

$$K \subset A \wedge K \subset \bar{K} \subset G \Rightarrow K \subset A \cap G$$
$$p \in A \wedge p \in H \Rightarrow p \in A \cap H$$
$$G \cap H \Rightarrow (A \cap G) \cap (A \cap H) = \emptyset$$

olur. □

10. Her T_3 uzayı aynı zamanda bir Hausdorff uzayıdır. Gösteriniz.

Çözüm: $(X;\mathscr{T})$ bir T_3-uzayı , $a, b \in X$ ve $a \neq b$ olsun. T_3-uzayı aynı zamanda T_1-uzayı olduğundan her noktası kapalıdır. $\{a\}$ kapalıdır ve $b \notin \{a\}$ dır. T_3-uzayı aynı zamanda düzenli uzaydır; o halde kapalı bir kümesi ile onun dışında bir nokta verilmişse, onların kesişmeyen birer komşulukları vardır:

$$(\exists T_a, T_b \in \mathscr{T})(a \in T_a)(b \in T_b)(T_a \cap T_b = \emptyset$$

Bu ise Hausdorff olma özeliğidir. □

11. Bir T_4 -uzayının bir alt-uzayının yine bir T_4 uzayı olması gerekmez. Bir örnekle gösteriniz.

Çözüm: *Tychonoff Plank* denilen uzay normal olmayan bir alt-uzaya sahip bir topolojik uzaydır. Bu örnek, normal uzayların kalıtım özeliği olmadığını gösterir. T_4 -uzayları normal ve T_1 -özeliklerini sağlayan uzaylardır. Dolayısıyla,*Tychonoff Plank* uzayı T_4 uzayının kalıtım özeliğine sahip olmadığını gösteren bir örnek olarak alınabilir.

$$\Omega_1 = \{w : w\text{bir ordinaldir ve}(w \leq \omega_1)\}$$

$$\Omega_2 = \{w : w\text{bir ordinaldir ve}(w \leq \omega_2)\}$$

kümeleri üzerinde ordinal sayıların sıra topolojisi var olsun. $\Omega_1 \times \Omega_2$ kartezyen çarpımı üzerine Ω_1 ve Ω_2 üzerindeki sıra topolojilerinin $\mathscr{P}$ çarpım topolojisini koyalım.

Çarpım uzay normaldir. Ama $S = \Omega_1$ ve $\Omega_2 - \{(\omega_1, \omega_2)\}$ alt-kümesini düşünelim. Bunun üzerine $\mathscr{P}$ çarpım topolojisinin kondurduğu alt-uzay topolojisi normal değildir.

14.10 KARMA PROBLEMLER

1. Her n doğal sayısı için X_n kümesi 0 ile 1 öğelerinden oluşan kümeye eşit olsun; yani $X_n = \{0, 1\}$ olsun. Bu kümeler üzerinde ayrık topolojiyi varsayalım. Şimdi $X = \Pi X_n, \quad n \in \mathbb{N}$ çarpım uzayını düşünelim. Her n doğal sayısı için $V_n = \{0\}$ kümesi çarpan uzaylarda açıktır. Ama

$$V = \Pi_{n=1}^{\infty} V_n \tag{14.4}$$

kartezyen çarpımı, çarpım uzay içinde açık bir küme değildir. Gösteriniz.

Çözüm:

$$X = \Pi_{n=1}^{\infty} X_n \tag{14.5}$$

$X = \Pi X_n, \quad n \in \mathbb{N}$ çarpım uzayında açık kümeler (9.7) ve (9.8) de tanımlandığı gibidir; yani çarpımda sonlu sayıda çarpan hariç, öteki çarpanların hepsi çarpan uzaya eşittir: Açık kümeler $T_i = \{0\}$ ya da $T_i = \{1\}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ olmak üzere, çarpım topolojinin açık kümeleri

$$\underbrace{T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_n}_{sonlu} \times \underbrace{X_n \times X_n \times \cdots \times X_n \times \cdots}_{sonsuz} \tag{14.6}$$

biçiminde olmalıdır. Oysa (14.4) ile (14.6) birbirlerinden farklıdır. Dolayısıyla (14.4) kümesi çarpım topolojide açık küme değildir.

2. X ile Y iki topolojik uzay ve $A \subset B$ ile $B \subset Y$ kapalı iseler $A \times B$ nin çarpım uzayda kapalı olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: $A \times B$ nin çarpım uzayda kapalı olması için tümleyeni açık olmalıdır. Böyle olup olmadığını araştıralım. Çarpım topolojiyi $\mathscr{P}$ ile gösterelim:
   $$A \times B \in \mathscr{P}' \Leftrightarrow (A \times B)' = A' \times B' \in \mathscr{P}$$
   dır; çünkü $A' \times B'$ kümesi çarpım topolojinin tabanına aittir.

3. X ile Y iki topolojik uzay ve $W \subset X \times Y$ çarpım uzayda açık ise

   (a) $\pi_1(W) \subset X$ ile $\pi_2(W) \subset Y$ izdüşümlerinin açık kümeler olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: İzdüşüm fonksiyonları sürekli ve açık dönüşümlerdir (bkz. Önerme 9.1.2).

   (b) Yukarıdaki özeliğin kapalı kümeler için genel olarak sağlanmadığını bir örnekle gösteriniz.

   Çözüm: İzdüşüm fonksiyonları kapalı dönüşümler değildir (bkz. Örnek 6.3.1).

4. $(X_i, \mathscr{T}_i)$ uzaylarının herbiri içinde kapalı olan bir $K_i \subset X_i$ kümesi veriliyor. $K_1 \times K_2 \times K_3 \times \cdots \times K_n$ kümesinin $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n$ çarpım uzayında kapalı olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: `Uyarı 9.1.2` gereğince, $K_1^{'} \times K_2^{'} \times K_3^{'} \times \cdots \times K_n^{'}$ kümesi çarpım topolojinin tabanına ait bir küme olduğu için açıktır. Öyleyse bunun tümleyeni olan $K_1 \times K_2 \times K_3 \times \cdots \times K_n$ kümesi kapalıdır.

5. Çarpım uzaydan çarpan uzaylara tanımlı izdüşüm fonksiyonlarının örten olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Bir Kümeler Ailesinin Kartezyen Çarpımı:
$\mathscr{X} = \{X_\imath : \imath \in I\}$ ailesinin kartezyen çarpımı her $\imath \in I$ için $x(\imath) \in X_\imath$ koşulunu sağlayan

$$x : I \to \bigcup_{\imath \in I} X_\imath$$

fonksiyonların oluşturduğu kümedir. Bu kümeyi

$$\Pi_{\imath \in I} X_\imath = \{x : x : I \to \bigcup_{\imath \in I} X_\imath\} \tag{14.7}$$

simgesiyle gösteririz. I sonlu ya da sayılabilir olduğunda $x = (x_\imath)_{\imath \in I}$ gösterimi kullanılır.

İzdüşüm Fonksiyonları:
(14.7) kartezyen çarpımından X_j çarpan (bileşen) kümesine giden

$$\pi_j : \Pi_{\imath \in I} X_\imath \to X_j,\ \pi_j(x) = x(j) \in X_j \tag{14.8}$$

fonksiyonuna, kartezyen çarpımdan X_j çarpan kümesine giden j-inci izdüşüm fonksiyonu denilir. I sonlu ya da sayılabilir olduğunda $\pi_j(x) = x(j) = x_j$ gösterimi kullanılır.

Çoğunlukla dizilerdeki alışkanlığı sürdürüp kartezyen çarpımın öğelerini (fonksiyonlarını) $x = (x_\imath)_{\imath \in I}$ biçiminde yazarız. Buna göre $x_j \in X_j$ öğesini j-inci bileşen kabul eden bir $x = (x_\imath)$ öğesi vardır. Dolayısıyla, $\pi_j(x) = x(j) = x_j \in X_j$ olur; yani izdüşüm fonksiyonu örten bir fonksiyondur.

Uyarı: Burada $(x_\imath)$ gösteriminden ve j-inci bileşen demekten sakınmak uygundur. Çünkü, I index kümesi sayılamaz sonsuz ve üstünde herhangi bir sıralama bağıntısı olmayan bir küme olabilir. O zaman j-inci bileşen deyimi tanımsız olur.

6. Çarpım uzaydan çarpan uzaylara tanımlı izdüşüm fonksiyonlarının sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm: `1.Yol:` Çarpım topoloji, çarpan uzayların izdüşüm fonksiyonlarına göre idüşel topolojisidir. Başka bir deyişle, çarpım topolojisi izdüşüm fonksiyonlarını sürekli kılan en kaba topolojidir (bkz. 8.1.1 Örnek).

`2.Yol:` $T \in \mathscr{T}_j$ ise

$$\pi_j^{-1}(T) = T \times \Pi_{\imath \in I} X_\imath, \quad j \neq \imath$$

olur. Bu küme çarpım topolojisinin tabanına ait olduğundan açıktır. Öyleyse π_j izdüşümü süreklidir.

7. Çarpım uzaydan çarpan uzaylara tanımlı izdüşüm fonksiyonlarının açık olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Önerme 9.1.2 ve Örnek 6.3.1 de yapıldı.

8. $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ fonksiyonu X uzayının yoğun alt kümelerini Y uzayının yoğun alt kümelerine resmederse, sürekli midir? Simgelerle söylersek,

$$\bar{A} = X \Rightarrow \overline{f(A)} = Y \tag{14.9}$$

olması f fonksiyonunun sürekli olmasını gerektirir mi? Neden?

9. X bir topolojik uzay ise

$$\Delta = \{(x, x) : \ x \in x\} \subset X \times X \tag{14.10}$$

köşegeninin $X \times X$ çarpım uzayında kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul X uzayının Hausdorff olmasıdır.

Çözüm:

$$\begin{aligned} x \in T_x,\, y \in T_y,\, T_x \cap T_y = \emptyset &\Leftrightarrow (x, y) \in T_x \times T_y,\, T_x \times T_y \cap \Delta = \emptyset \\ &\Leftrightarrow T_x \times T_y \subset \Delta',\, (x, y) \in T_x \times T_y \\ &\Leftrightarrow \Delta' \text{ açıktır} \end{aligned}$$

10. Bir çarpım uzaydan bileşen uzaylara tanımlı izdüşüm fonksiyonları birer bölüm dönüşümüdür; yani $(X_i, \mathscr{T}_i)$ uzayları verilmişse

$$\pi_i : X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n \longrightarrow X_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

dönüşümleri birer bölüm dönüşümüdür. Gösteriniz.