13.6 FONKSİYONUN LİMİTİ

13.7 PROBLEMLER

1. Bir X topolojik uzayında verilen bir $x = (x_n)$ dizisini

$$x : \mathbb{N} \to X;\ \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ için } x(n) = x_n$$

fonksiyonu olarak tanımlamıştık. Bu x fonksiyonunun *Fréchet Süzgeci*ne göre limitinin, (x_n) dizisinin limitinden başka birşey olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $S_n = (x_k)_{n>k}$ olmak üzere Frechet süzgecinin bir tabanı $\mathscr{F} = \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ dir. Yani (x_n) dizisinin mümkün bütün kuyruklarından oluşan kümeler (diziler)dir. $(X, \mathscr{T})$ topolojisine göre x noktasının komşuluklar tabanını (yerel taban) $\mathfrak{S}(x)$ ile gösterelim. Buna göre,

$$\begin{aligned} x_n \to x &\Leftrightarrow (\forall B \in \mathfrak{S}(x))(\exists n_0)(n_0 < n \Rightarrow x_n \in B) \\ &\Leftrightarrow (\forall B \in \mathfrak{S}(x))(\exists S_0 \in \mathscr{F})(S_0 \subset B \\ &\Leftrightarrow \mathscr{F} \to x \end{aligned}$$

olur. x fonksiyon olarak düşünülürse, $x(S_n) = S_n$ olacağından, yukarıdaki çözüme indirgenir.

2. $y \in Y$ noktası $f : X \to (Y, \mathscr{T})$ nun X üzerindeki bir $\mathscr{S}$ süzgecine göre limit (ya da kaplama) noktası olsun. Gösteriniz ki $\mathscr{S}$ süzgeci inceldikçe ve $\mathscr{T}$ topolojisi kabalaştıkça y noktasının limit (ya da kaplama noktası) olma niteliği bozulmaz.

Çözüm: $\lim_{\mathscr{S}} f = y \Leftrightarrow \mathscr{B}(y) \subset f(\mathscr{S})$ dir. Süzgeç incelirse, örneğin, $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}_1$ ise $\mathscr{B}(y) \subset f(\mathscr{S}) \subset f(\mathscr{S}_1) \Rightarrow \lim_{\mathscr{S}_1} f = y$ çıkar.

Tersine olarak, $\mathscr{T}$ yerine daha kaba bir $\mathscr{T}_1$ topolojisini alırsak, $\mathscr{B}_1(y) \subset \mathscr{B}(y) \subset f(\mathscr{S}) \Rightarrow \lim_{\mathscr{S}} f = y$ çıkar.

3. Bir fonksiyonun bir süzgece göre bütün kaplama noktalarından oluşan kümenin (boş olabilir) kapalı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\mathscr{S}$ ailesi X üzerinde bir süzgeç olsun ve $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Kapalı kümeler ailesinin arakesiti kapalı olduğundan $\bigcap_{S \in \mathscr{S}} \overline{f(S)}$ arakesiti kapalıdır.

4. Birinci sayılabilme Aksiyomunu sağlayan $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayının bir $A \subset X$ alt kümesi veriliyor. $x \in \bar{A}$ olması için gerekli ve yeterli koşul A kümesi içinde x öğesine yakınsayan bir $(x_n, (n \in \mathbb{N})$ dizisinin olmasıdır. Gösteriniz.

Çözüm: Önerme 11.2.1 de ispatlandı.

5. X kümesi içinde $(x_\lambda),\quad (\lambda \in \Lambda)$ ağı verilsin. Her $\imath$ için $F\imath = \{x_\jmath : \jmath \geq \imath\}$ kümesi tanımlanıyor.

(a) $\mathcal{F} = \{F_\imath : \imath \in I\}$ ailesinin X kümesi üzerinde bir süzgeç tabanı oluşturduğunu gösteriniz.

(b) $x_\imath \to p \Leftrightarrow \mathcal{F} \to p$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

(a) Problem 13.3.1(8) de gösterildi.

(b)

$$\begin{aligned} x_\imath \to p &\Leftrightarrow (\forall B \in \mathfrak{S}(p))(\exists \lambda_0)(\lambda_0 < \lambda \Rightarrow x_\lambda \in B \\ &\Leftrightarrow (\forall B \in \mathfrak{S}(p))(\exists \lambda_0)(\lambda_0 < \lambda \Rightarrow F_\lambda \subset B \\ &\Leftrightarrow \mathscr{F} \to p \end{aligned}$$

6. $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(X)$ süzgeç tabanı verilsin. $\mathcal{F}$ üzerinde $\succeq$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanıyor:

$$U \succeq V \Leftrightarrow U \subseteq V$$

(a) $(\mathcal{F}, \succeq)$ sisteminin tikel sıralı bir sistem olduğunu gösteriniz.

(b) Her

$$(x_U)_{U \in \mathcal{F}} \in \Pi_{U \in \mathcal{F}} U \tag{13.3}$$

öğesinin X içinde $(x_U)_{U\in\mathcal{F}} \subset X$ ağını belirlediğini gösteriniz.

(c) Bu şekilde seçilen her $(x_U)_{U\in\mathcal{F}} \subset X$ ağı için

$$\mathcal{F} \to p \Leftrightarrow x_U \to p$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

(a) $(\mathscr{P}(X), \subset)$ sisteminin yansımalı (reflexive), yanal simetrisiz (antisimetrik) ve geçişli (transitive) olduğu kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla, bunun bir alt sistemi olan $(\mathcal{F}, \succeq)$ tikel (kısmi) sıralı bir sistemdir.

(b) $U, V \in \mathcal{F}$ ise $U \cap V \subset U$ ve $U \cap V \subset V$ olduğundan $\mathcal{F}$ yönlenmiş bir sistemdir. Yönlenmiş $\mathcal{F}$ sisteminin öğeleriyle damgalanan (13.6 öğesi bir ağdır.

(c) Önceki problemde yapıldı.

7. $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayının bir $A \subset X$ alt kümesi veriliyor.

(a) $x \in \bar{A}$ olması için gerekli ve yeterli koşul A kümesi içinde x öğesine yakınsayan bir (x_λ), $(\lambda \in \Lambda)$ ağının olmasıdır. Gösteriniz.

(b) Yukarıda *"ağ"* yerine *"dizi"* konulursa ne olur?

(c) $x \in \bar{A}$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathscr{P}(A)$ içinde x öğesine yakınsayan bir $\mathscr{F}$ süzgecinin olmasıdır. Gösteriniz.

ÇÖZÜM:

(a) Sonuç 12.2.1 de ispatlandı.

(b) Önerme 12.2.1 de ispatlandı.

(c) $x \in \bar{A}$ verilsin. Önceki sorudakine benzer olarak, her $V \in \mathscr{B}(x)$ için bir $x_V \in V$ seçerek $\{(x_V) : V \in \mathscr{B}(x)$ ağını oluşturalım. Sonra bu ağdan, $F_U = \{x_V : U \subset V\}$ olmak üzere, $\mathcal{F} = \{F_V : V \in \mathscr{B}(x)$ süzgeç tabanını kuralım. $\mathcal{F} \to x$ olduğu açıktır. O halde $\mathcal{F}$ nin ürettiği $\mathscr{F}$ süzgeci de x noktasına yakınsayacaktır.

Karşıt olarak, $A \in \mathscr{F}$ ve $\mathscr{F} \to x$ olacak biçimde bir $\mathscr{F}$ süzgeci var olsun. Her $U \in \mathscr{B}(x)$ komşuluğu $\mathscr{F}$ süzgecine ait kümelerin herbiriyle kesişir. O halde

$$\begin{aligned} U \in \mathscr{B}(x) &\Rightarrow (F \in \mathscr{F} \Rightarrow U \cap F \neq \emptyset \\ &\Rightarrow (A \in \mathscr{F} \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset \\ &\Rightarrow x \in \bar{A} \end{aligned}$$

çıkar.