13.4 SÜZGECİN LİMİTİ

13.5 PROBLEMLER

1. Bir X kümesi üzerinde $\mathscr{T}_1$ ve $\mathscr{T}_2$ topolojileri veriliyor. $\mathscr{T}_1$ topolojisinin $\mathscr{T}_2$ den daha ince dokulu olması için gerekli ve yeterli koşul, $\mathscr{T}_1$ topolojisine göre yakınsak olan her süzgecin $\mathscr{T}_2$ ye göre de aynı noktaya yakınsamasıdır. Gösteriniz.

   ÇÖZÜM: $\mathscr{T}_1$ topolojisine göre $\mathscr{S} \to x \Leftrightarrow \mathscr{B}_1(x) \subset \mathscr{S}$ dir. $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1$ ise $\mathscr{B}_2(x) \subset \mathscr{B}_1(x) \subset \mathscr{S}$ olacağından $\mathscr{T}_2$ topolojisine göre de $\mathscr{S} \to x$ olacaktır.

2. $f : X \to Y$ fonksiyonu bir $x \in X$ noktasında sürekli olsun. x noktası X üzerindeki bir $\mathscr{B}$ süzgeç tabanının bir kaplama noktası ise $f(x)$ noktası Y üzerindeki $f(\mathscr{B})$ *süzgeç tabanının* bir *kaplama* noktasıdır. Gösteriniz.

   ÇÖZÜM: $\mathscr{B}$ bir süzgeç tabanı ise $f(\mathscr{B})$ nin de bir süzgeç tabanı ulduğunu biliyoruz. Önerme 6.1.1 uyarınca $x|in\bar{B} \Rightarrow f(x) \in \overline{f(B)}$ dir. O halde, $f(x)$ görüntüsü $f(\mathscr{B})$ nin bir kaplama noktasıdır.

3. Bir $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayında her hangi bir x noktasının bütün komşuluklarının oluşturduğu $\mathscr{B}(x)$ ailesinin bir süzgeç olduğunu biliyoruz. $\mathscr{B}(x)$ komşuluklar ailesinin her $\mathfrak{S}(x)$ tabanının $\mathscr{B}(x)$ süzgecinin bir tabanı olduğunu gösteriniz.

   ÇÖZÜM: Önerme 13.3.3 ve Önerme 13.3.4 den hemen görülür.

4. X boş olmayan bir küme ve $x \in X$ olsun.

   $$\mathscr{M} = \{M : x \in M,\ M \subset X\}$$

   ailesinin bir aşkın süzgeç olduğunu gösteriniz.

   ÇÖZÜM: Önce $\mathscr{M}$ nin bir süzgeç olduğunu gösterelim. [S1]: Her $M \in \mathscr{M}$ kümesi x noktasını içerdiğinden boş değildir. Dolayısıyla boş küme $\mathscr{M}$ ye ait değildir.

   [S2]: $M_1, M_2 \in \mathscr{M}$ ise $x \in M_1 \cap M_2$ olduğundan $M_1 \cap M_2 \in \mathscr{M}$ dir.

   [S3]: $M_1 \in \mathscr{M}$ ve $M_1 \subset M_2$ ise $x \in M_2$ olacağından $M_2 \in \mathscr{M}$ çıkar.

   Şimdi de $\mathscr{M}$ nin aşkın bir süzgeç olduğunu gösterelim. $\mathscr{M} \subset \mathscr{N}$ olduğunu varsayalım. Bir $S_1 \in \mathscr{N}$ kümesi seçelim. $S_2 = \{x\}$ diyelim. $S_2 \in \mathscr{M} \subset \mathscr{N}$ olduğundan $S_1 \cap S_2 = \{x\} \neq \emptyset$ dir. Buradan $x \in S_1 \Rightarrow S_1 \in \mathscr{M}$ çıkar. Her $S_1 \in \mathscr{N}$ için bu özelik var olduğundan $\mathscr{N} \subset \mathscr{N}$ dir. O halde $\mathscr{M}$ aşkın bir süzgeçtir.

5. X sonsuz bir küme olsun. X içinde tümleyenleri sonlu olan bütün alt kümelerin oluşturduğu ailenin bir süzgeç olduğunu gösteriniz. Bunu simgelerle gösterirsek,

   $$\mathscr{F} = \{A : A \subset X,\ A \text{ sonlu}\}$$

ailesi bir süzgeçtir. Gösteriniz.

ÇÖZÜM:

[S1]: X boş değilse tümleyeni sonlu olan kümelerin hiç birisi boş değildir. Dolayısıyla $\mathscr{F}$ boş değildir.

[S2]: Tümleynleri sonlu olan iki kümenin arakesitinin de tümleyeni sonludur; yani $A, B \in \mathscr{F}$ ise $(A \cap B)' = A' \cup B'$ sonludur. Dolayısıyla $A \cap B \in \mathscr{F}$ dir.

[S3]: $A \in \mathscr{F}$ ve $A \subset B$ ise $B' \subset A'$ olduğundan B nin tümleyeni sonludur. O halde $B \in \mathscr{F}$ dir.

6. $\mathscr{F}$ ile $\mathscr{G}$ aileleri X üzerinde iki süzgeç ise, bu süzgeçlerin ortak öğelerinden oluşan $\mathscr{H}$ ailesi de X kümesi üzerinde bir süzgeçtir. İki süzgecin ortak öğeleri,
$$\mathscr{H} = \{H \,:\, H \in \mathscr{F} \text{ ve } H \in \mathscr{G}\}$$
ailesidir.

ÇÖZÜM:

[S1]: İki süzgecin ortak bir öğesi varsa $\mathscr{H}$ boş değildir. $X \in \mathscr{F}$ ve $X \in \mathscr{G}$ olduğundan $X \in \mathscr{H}$ olur. O halde $\mathscr{H} \neq \emptyset$ dir.

[S2]: $H_1, H_2 \in \mathscr{H}$ ise $H_1 \cap H_2 \in \mathscr{F}$ ve $H_1 \cap H_2 \in \mathscr{G}$ dir. O halde $H_1 \cap H_2 \in \mathscr{H}$ olur.

[S3]: $H_1 \in \mathscr{H}$ ve $H_1 \subset H_2$ olsun. $H_2 \in \mathscr{F}$ ve $H_2 \in \mathscr{G}$ olduğundan $H_2 \in \mathscr{H}$ çıkar.

Not: Bu problem X üzerinde tanımlı herhangi bir $\mathscr{H}_i$ süzgeçler ailesinin arakesiti için de doğrudur.(Bkz. Önerme 13.2.1.)

7. $\mathscr{F}$ ile $\mathscr{G}$ aileleri X üzerinde iki süzgeç ise, bu süzgeçlere ait karşılıklı kümelerin ikişer ikişer arakesitlerinden oluşan $\mathscr{L}$ ailesi; yani
$$\mathscr{L} = \{F \cap G \,:\, F \in \mathscr{F} \text{ ve } G \in \mathscr{G}\}$$
ailesi X kümesi üzerinde bir süzgeç olur mu? Neden?

ÇÖZÜM: Olmayabilir. $\mathscr{L}$ ailesinin bir süzgeç olabilmesi için $F \cap G$ arakesitlerinin hiç birisi boş olmamalıdır.

8. $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayında $\mathscr{T}$ açık kümeler ailesi bir süzgeç tabanı ise, farklı iki noktasının birbirlerinden ayrık komşulukları var olamaz. Simgelerle açıklarsak,
$$[x, y \in X,\, x \neq y] \Longrightarrow [[(A \in \mathscr{B}(x)) \wedge (B \in \mathscr{B}(y))] \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset]$$
olur.

ÇÖZÜM: $(A \in \mathscr{B}(x))$ ve $(B \in \mathscr{B}(y))$ ise $x \in T_1 \subset A$ ve $y \in T_2 \subset B$ olacak biçimde $T_1, T_2 \in \mathscr{T}$ açık kümeleri vardır. $\mathscr{T})$ bir süzgeç tabanı ise $T \subset T_1 \cap T_2$ olacak biçimde bir $T \in \mathscr{T}$ vardır. O halde $\emptyset \neq T \subset T_1 \cap T_2 A \cap B$ olduğundan $A \cap B \neq \emptyset$ dir.