13.3 SÜZGEÇ TABANLARI

13.3.1 Problemler

1. X ve Y kümeleri ile bir $f : X \to Y$ fonksiyonu veriliyor. $\mathscr{B}$ ailesi Y kümesi üzerinde bir süzgeç tabanı ise $f^{-1}(\mathscr{B})$ nin X üzerinde bir süzgeç tabanı olması için gerekli ve yeterli koşul, her $B \in \mathscr{B}$ için $f^{-1}(B) \neq \emptyset$ olmasıdır. Gösteriniz.

   ÇÖZÜM:

   [B1]: $f^{-1}(B) \neq \emptyset$ olduğundan $\emptyset \notin f^{-1}(\mathscr{B})$ ve $f^{-1}(\mathscr{B}) \neq \emptyset$ dir.

   [B2]: $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ ise $B_3 \subset B_2 \cap B_1$ olacak biçimde bir $B_3 \in \mathscr{B}$ var olduğundan
   $$f^{-1}(B_3) \subset f^{-1}(B_2) \cap f^{-1}(B_1)$$
   olacaktır.

2. Önceki problemdeki gösterimler altında $f(f^{-1}(\mathscr{B}))$ ailesinin Y üzerinde bir süzgeç tabanı olduğunu ve bunun doğurduğu süzgecin $\mathscr{B}$ nin doğurduğu süzgeçten daha kaba olmadığını gösteriniz. (Yol gösterme: Her B kümesi için $f(f^{-1}(B)) = B$ bağıntısı ile `Önerme 13.3.2` yi kullanınız).

   ÇÖZÜM: $f^{-1}(\mathscr{B})$ ailesinin X kümesi üzerinde bir süzgeç tabanı olduğunu önceki problemde gösterdik. $\mathscr{V} = f^{-1}(\mathscr{B})$ diyelim. Önerme 13.3.3 uyarınca $f(\mathscr{V}) = f(f^{-1}(\mathscr{B}))$ ailesi Y üzerinde bir süzgeç tabanıdır. Her $B \in \mathscr{B}$ için $f(f^{-1}(B)) = B$ olduğundan, istenen ortaya çıkar.

3. $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin ve $\mathscr{B}$ ailesi X kümesi üzerinde bir süzgeç tabanı olsun. $f^{-1}(f(\mathscr{B}))$ nin ürettiği süzgecin, X üzerinde $\mathscr{B}$ nin ürettiği süzgeçten daha kaba olduğunu gösteriniz. (Yol gösterme: Her B kümesi için $f^{-1}(f(B) \supset B$ bağıntısı ile `Önerme 13.3.2` yi kullanınız).

   ÇÖZÜM: Her $B \in \mathscr{B}$ için $B \neq \emptyset$ olduğundan $f(B) \neq \emptyset$ dir. O halde, Önerme 13.3.3 uyarınca $\mathfrak{B} = f(\mathscr{B})$ ailesi Y üzerinde bir süzgeç tabanıdır. 1.Problem uyarınca $f^{-1}(\mathfrak{B}) = f^{-1}(f(\mathscr{B}))$ ailesi X üzerinde bir süzgeç tabanıdır. Ayrıca her $B \in \mathscr{B}$ için $f^{-1}(f(B) \supset B$ olduğundan, Önerme 13.3.2 uyarınca, $f^{-1}(f(\mathscr{B}))$ nin ürettiği süzgeç, X üzerinde $\mathscr{B}$ nin ürettiği süzgeçten daha kabadır.

4. Yukarıdaki gösterimler altında f nin bire-bir örten olması için gerekli ve yeterli koşul, X üzerindeki her $\mathscr{B}$ süzgeç tabanı için $f^{-1}(f(\mathscr{B}))$ nin $\mathscr{B}$ ye denk bir süzgeç tabanı olmasıdır. Gösteriniz.

   ÇÖZÜM: $f : X \to Y$ bire-bir-örten (bbö) ise her $B \in \mathscr{B}$ için $f^{-1}(f(B) = B$ olacağından sözkonusu süzgeçler aynı olur. Tersine olarak, üretilen süzgeçler aynı ise her $B \in \mathscr{B}$ için $f^{-1}(f(B) = B$ olmalıdır. Özel olarak $f^{-1}(f(X) = X$ olacaktır. Bunun olabilmesi için f bbö olmalıdır.

5. $f : X \to Y$ örten bir fonksiyon ve $\mathscr{S}$ ailesi X kümesi üzerinde bir süzgeç ise $f(\mathscr{S})$ nin Y üzerinde bir süzgeç olacağını gösteriniz. *"Örtenlik"* koşulu kalkarsa ne olur?

ÇÖZÜM:

[S1]: Her $S \in \mathscr{S}$ için $S \neq \emptyset$ olduğundan $f(S) \neq \emptyset$ dir. Dolayısıyla $f(\mathscr{S}) \neq \emptyset$ dir.

[S2]: Her $f(S_1), f(S_2) \in f(\mathscr{S})$ için $S_3 \subset S_1 \cap S_2$ seçilebilir. Buradan $f(S_3) \subset f(S_1 \cap S_2) \subset f(S_1) \cap f(S_2)$ çıkar.

[S3]: $f(S) \subset A$ ise $S \subset f^{-1}(f(S)) \subset f^{-1}(A)$ olduğundan $f^{-1}(A) \in \mathscr{S}$ dir. O halde, $f(S) \subset fof^{-1}(A) = A$ bağıntısından $A \in f(\mathscr{S})$ olduğu sonucu çıkar.

Son olarak her $S \in \mathscr{S}$ için $f(S) \subset Y$ olduğundan $Y \in f(\mathscr{S})$ olmalıdır. Bunun olması için f nin örten olması gerekir. Bu durumda $X \in \mathscr{S} \Rightarrow f(X) \in f(\mathscr{S})$ olacaktır. f fonksiyonu örten değilse bu koşul sağlanmaz, dolayısıyla $f(\mathscr{S})$ bir süzgeç olamaz.

6. Yalnızca iki öğesi olan $X = \{x, y\}$ kümesi üzerinde ayrık olmayan topoloji var olsun.

   (a) $\mathscr{S} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ ailesinin bir süzgeç olduğunu gösteriniz.

   (b) $\mathscr{S}$ süzgecinin hem x, hem y noktasına yakınsadığını gösteriniz.

   (c) Buradan, bir süzgecin limitinin tek olmayabileceği sonucunu çıkarınız.

   ÇÖZÜM:

   (a) Kolayca görülebileceği gibi boş küme $\mathscr{S}$ ailesine ait değildir, $\mathscr{S}$ ye ait iki kümenin arakesiti $\mathscr{S}$ ye aittir, $\mathscr{S}$ ye ait bir kümeyi kapsayan her küme $\mathscr{S}$ ye aittir. Dolayısıyla $\mathscr{S}$ ailesi X üzerinde bir süzgeçtir.

   (b) X üzerinde ayrık olmayan topoloji $\mathscr{T} = \{\emptyset, \{x, y\}\}$ dir. Açıkça görüldüğü gibi $\mathscr{T} \subset \mathscr{S}$ dir. Yakınsama tanımı uyarınca $\mathscr{S} \to x$ ve $\mathscr{S} \to y$ dir.

   (c) Yukarıdaki sonuç, bir süzgecin limitinin tek olmayabileceğini gösteriyor.

7. Sonlu bir X kümesi üzerindeki her $\mathfrak{U}$ aşkın süzgeci için

$$\mathfrak{U} = \{A \,:\, A \subset X,\ x \in A\}$$

   olacak şekilde bir $x \in X$ noktası vardır. Gösteriniz.

   ÇÖZÜM: X kümesi sonlu olduğu için $\mathfrak{U}$ ailesi de sonludur. Her sonlu sayıda kümesinin arakesiti boş olmayacağından $\bigcap_{a\in\mathfrak{U}} A \neq \emptyset$ olacaktır. Dolayısıyla arakesite ait en ax bir tane $x \in X$ öğesi vardır.

8. $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ bir ağ ise

$$\mathscr{B} = \{(x_\lambda) \,:\, \lambda, \lambda_0 \in \Lambda \,,\, \lambda > \lambda_0\}$$

   ailesinin bir süzgeç tabanı olduğunu gösteriniz. Buradan çıkan sonuç şudur: Her ağdan bir süzgeç üretilebilir.

Çözüm:

[B1]: $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağı boş olmadığı için hiçbir $\mathscr{B} \ni S = (x_\lambda)_{\lambda>\lambda_0}$ kümesi boş değildir. Dolayısıyla, $\mathscr{B}$ ailesi boş değildir ve boş kümeyi içermez.

[B2]: $S_1 = (x_\lambda)_{\lambda>\lambda_1}$ ve $S_2 = (x_\lambda)_{\lambda>\lambda_2}$ kümeleri verilsin. Λ yönlenmiş bir küme olduğundan $\lambda_1 < \lambda_0$ ve $\lambda_2 > \lambda_0$ olacak biçimde bir $\lambda_0 \in \Lambda$ vardır. Bu durumda $S_0 = (x_\lambda)_{\lambda>\lambda_0}$ dersek $S_0 \subset S_1 \cap S_2$ olur.