13.2 SÜZGEÇLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

13.2.1 Problemler

1. Sonlu bir küme üzerindeki bütün mümkün süzgeçleri bulunuz.

   ÇÖZÜM: Örneğin $X = \{a, b, c, d, e\}$ olsun. Bu küme üzerinde

   (a) $\mathscr{S}_1 = \{X\}$

   (b) $\mathscr{S}_a = \{\{a\}, X\}$, $\mathscr{S}_b = \{\{b\}, X\}$, $\mathscr{S}_c = \{\{c\}, X\}$, $\mathscr{S}_d = \{\{d\}, X\}$, $\mathscr{S}_e = \{\{e\}, X\}$

   (c) $\mathscr{S}_{ab} = \{\{a, b\}, X\}$, $\mathscr{S}_{ac} = \{\{a, c\}, X\}$, $\mathscr{S}_{ad} = \{\{a, d\}, X\}$, $\mathscr{S}_{ae} = \{\{a, e\}, X\}$, $\mathscr{S}_{bc} = \{\{b, c\}, X\}$, ...

   (d) $\mathscr{S}_{abc} = \{\{a, b, c\}, X\}$, $\mathscr{S}_{acd} = \{\{a, c, d\}, X\}$, $\mathscr{S}_{ace} = \{\{a, c, e\}, X\}$, $\mathscr{S}_{bcd} = \{\{b, c, d\}, X\}$, $\mathscr{S}_{bce} = \{\{b, c, e\}, X\}$, ...

   (e) $\mathscr{S}_{abcd} = \{\{a, b, c, d\}, X\}$, $\mathscr{S}_{abce} = \{\{a, b, c, e\}, X\}$, $\mathscr{S}_{bcde} = \{\{b, c, d, e\}, X\}$, $\mathscr{S}_{abde} = \{\{a, b, d, e\}, X\}$, $\mathscr{S}_{acde} = \{\{a, c, d, e\}, X\}$, ...

   5 öğeli bir kümede yukarıdaki 31 farklı süzgeci tanımlamış olduk.

2. Sonsuz bir X kümesi üzerindeki bir $\mathscr{A}$ süzgecinin bütün kümelerinin arakesiti boş ise, bunun X üzerindeki sonlu tümleyenler süzgecinden daha ince olduğunu gösteriniz.

   ÇÖZÜM: Sonlu tümleyenler süzgecini $\mathscr{S}$ ile gösterelim. $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ olduğunu göstermeliyiz. Olmayana Ergi Yöntemini kullanalım. Bir $S \in \mathscr{S}$ kümesinin $\mathscr{A}$ ya ait olmadığını varsayalım. Bu durumda S kümesi $\mathscr{A}$ ya ait hiç bir kümenin üst kümesi olamaz. Buradan her $A \in \mathscr{A}$ için $A \cap S' \neq \emptyset$ olduğu sonucu çıkar. Bu ise

   $$\emptyset \neq \bigcap_{A \in \mathscr{A}} (A \cap S') \subset \bigcap_{A \in \mathscr{A}} A = \emptyset$$

   olurdu. Bu çelişki olamayacağına göre, kabulümüz yanlıştır; yani her $S \in \mathscr{S}$ kümesi $\mathscr{A}$ süzgecine aittir. Dolayısıyla, $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ olur.

3. $\mathscr{S}$ ve $\mathscr{H}$ bir X kümesi üzerinde iki süzgeç olsun. X üzerindeki süzgeçler arasında bu ikisinin bir en küçük üst sınırı varsa, bunun

   $$\mathscr{D} = \{S \cap H \quad | \quad S \in \mathscr{S},\ H \in \mathscr{H}\}$$

   olduğunu gösteriniz.

   ÇÖZÜM: Önerme 13.2.5 gereğince, söz konusu en küçük üst sınırın (sup) olması için gerekli ve yeterli koşul her $S \in \mathscr{S}$ ve her $H \in \mathscr{H}$ için $S \cap H \neq \emptyset$ olmasıdır. Bu koşul altında $\mathscr{D}$ nin bir süzgeç olduğunu gösterebiliriz:

   (a) $\emptyset \notin \mathscr{D}$ dir.

(b) $S_1 \cap H_1 \in \mathscr{D}$ ve $S_2 \cap H_2 \in \mathscr{D}$ ise

$$(S_1 \cap H_1) \cap (S_2 \cap H_2) = (S_1 \cap S_2) \cap (H_1 \cap H_2) \in \mathscr{D}$$

dir.

(c) $S_1, S_2 \in \mathscr{S}$ ve $H_1, H_2 \in \mathscr{H}$ olmak üzere $S_1 \cap H_1 \subset S_2 \cap H_2$ ise $S_1 \subset S_2$ ve $H_1 \subset H_2$ olacağından $S_2 \cap H_2 \in \mathscr{D}$ olur.

4. $\mathscr{S}_\infty$ ailesi $\mathbb{R}$ nin $(a, \infty), a \in \mathbb{R}$ şeklinde bir aralığını içeren bütün alt-kümelerinden oluşsun. Bu ailenin $\mathbb{R}$ üzerinde bir süzgeç oluşturacağını gösteriniz.

   Çözüm: Tanım 13.1.1 koşullarının sağlandığını göstereceğiz.

   (a) Her $S \in \mathscr{S}_\infty$ kümesi bir (a, ∞) aralığını içerdiğinden hiç birisi boş olamaz.

   (b) $A, B \in \mathscr{S}_\infty$ ise $(a, \infty) \subset A$ ve $(b, \infty) \subset B$ olacak biçimde a, b gerçel sayıları vardır. $c = \max\{a, b\}$ diyelim. $(c, \infty) \subset A \cap B$ olduğundan $A \cap B \in \mathscr{S}_\infty$ olacaktır.

   (c) $S \in \mathscr{S}_\infty$ ve $S \subset A$ olsun. $(a, \infty) \subset S$ ise $(a, \infty) \subset A$ olmalıdır. Dolayısıyla $S \in \mathscr{S}_\infty$ olur.

5. $\mathscr{S}$ ailesi X üzerinde bir süzgeç olsun ve bir $A \subset X$ alt-kümesi verilsin. $\mathscr{S}$ nin A üzerindeki $\mathscr{S}_A$ izinin (trace) bir süzgeç olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathscr{S}$ nin her kümesinin A ile kesişmesidir. Gösteriniz.

   Çözüm:
$$\mathscr{S}_A = \{A \cap S | \, S \in \mathscr{S}$$

   ailesinin A üzerinde bir süzgeç olduğunu göstereceğiz.

   (a) $\mathscr{S}$ nin her kümesi A ile kesişiyorsa $A \cap S \neq \emptyset$ olur. O halde $\emptyset \notin \mathscr{S}_A$ dir.

   (b) $A \cap S_1 \in \mathscr{S}_A$ ve $A \cap S_2 \in \mathscr{S}_A$ ise

$$(A \cap S_1) \cap (A \cap S_2) = A \cap (S_1 \cap S_2) \in \mathscr{S}_A$$

   olur.

   (c) $(A \cap S_1) \subset (A \cap S_2)$ ise $S_1 \subset S_2$ olacağından $S_2 \in \mathscr{S}$ dir. O halde $(A \cap S_2) \in \mathscr{S}_A$ dır.

6. $\mathscr{F}$ ailesi X kümesi üzerinde bir aşkın süzgeç (ultra filter) olsun. Eğer

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \mathscr{F}$$

   ise, $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ kümelerinden en az bir tanesi $\mathscr{F}$ aşkın süzgecine aittir. Gösteriniz.

   Çözüm:

Özel Durum: Önce problemi iki küme için çözelim. $A \cup B \in \mathscr{F}$ olduğunda ya $A \in \mathscr{F}$ ya da $B \in \mathscr{F}$ olduğunu gösterelim.

Olmayana Ergi Yöntemini kullanalım. $A \notin \mathscr{F}$ ve $B \notin \mathscr{F}$ olduğunu varsayalım.

$$\mathscr{G} = \{C \mid \emptyset \neq C \subset X, \; A \cup C \in \mathscr{F}\}$$

ailesini tanımlayalım. Bu ailenin X kümesi üzerinde bir süzgeç olduğu kolayca görülür. Ayrıca $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ ve $B \in \mathscr{G}$ dir. Oysa $\mathscr{F}$ aşkın (ultra) süzgeçtir. Öyleyse $\mathscr{F} = \mathscr{G}$ olmalıdır. O halde $B \in \mathscr{F}$ dir. Bu ise kabulümüzün çelişki yarattığını gösterir. Demek ki, $A \cup B \in \mathscr{F}$ olduğunda ya $A \in \mathscr{F}$ ya da $B \in \mathscr{F}$ olmalıdır.

Genel Durum: $A_i \notin \mathscr{F}$ ise, Ön Problem 1(c) uyarınca, $A_i^{'} \in \mathscr{F}$, $(n = 1, 2, \ldots, n)$ olacaktır. Bunların sonlu arakesiti de süzgece ait olmalıdır; yani

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i^{'} = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)^{'} \in \mathscr{F}$$

olacaktır. Oysa bu içerme olamaz; çünkü

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F}$$

içermesi vardır. O halde kabulümüz yanlıştır. En az bir $A_i \in \mathscr{F}$ olmalıdır.