Bölüm 13

SÜZGEÇLER

13.1 Ön Bilgiler

13.1.1 Topoloji Belirleme Yöntemleri

Bir topolojiyi belirlemek demek onun açık kümelerini (ya da kapalı kümelerini) belirlemek demektir. Şimdiye kadar topolojiyi belirlemek için kullandığımız yöntemler şunlardır:

Açık Kümeler $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayının açık kümelerinin hangileri olduğu belirlenir (Bkz. 2. Bölüm).

Kapalı Kümeler $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayının kapalı kümelerinin hangileri olduğu belirlenir (Bkz. 2. Bölüm).

Kaplama İşlemi $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayında her kümenin kaplamı belirlemek için $A \to \bar{A}$ dönüşümü tanımlanır. (Bkz. 3.Bölüm, Kuratowski Yöntemi)

İçlem İşlemi $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayında her kümenin içlemi belirlemek için $A \to A^o$ dönüşümü tanımlanır (Bkz. 3. Bölüm).

Komşuluklar $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayında her x noktasının $\mathscr{B}(x)$ komşuluklar ailesi belirlenir (Bkz. 5. Bölüm).

Tabanlar Açık kümelerin, kapalı kümelerin ve komşulukların tabanı tanımlanır.

- **Açık Kümeler İçin Taban** $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayında açık kümeler için taban belirlenir.
- **Kapalı Kümeler İçin Taban** $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayında kapalı kümeler için taban belirlenir.
- **Komşuluklar Tabanı** $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayında her x noktasının $\mathfrak{S}(x)$ komşuluklar tabanı belirlenir.

Sürekli Fonksiyonlarla Belirlenen Topolojiler Mevcut topolojik uzaylardan yararlanılarak başka kümeler üzerine topoloji kondurma yöntemleridir. İzdüşel Topoloji, Tümel Topoloji, Alt Uzay Topolojisi, Çarpım Topolojisi, Bölüm Topolojisi bu yöntemle tanımlandı.

Yakınsama Kavramıyla Topoloji Belirleme Dizilerin, ağların ve süzgeçlerin yakınsaması kavramından hareketle bir topolojinin belirlenmesi mümkündür:

Diziler Yardımıyla Topoloji Belirleme $(X, \mathscr{T})$ Birinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlayan bir uzay olmak üzere A kümesi üzerindeki her yakınsak dizinin limiti A kümesine aitse A kümesi kapalı bir kümedir.

Ağlar Yardımıyla Topoloji Belirleme A kümesi üzerindeki her yakınsak ağın limiti A kümesine aitse A kümesi kapalı bir kümedir.

Süzgeçler Yardımıyla Topoloji Belirleme A kümesi üzerindeki her yakınsak süzgecin limiti A kümesine aitse A kümesi kapalı bir kümedir.

13.1.2 ÖN BİLGİLER

Bu bölümdeki bazı problemlerin kolay çözümlerini elde edebilmek için, aşağıdaki bilgilere başvuracağız.

Tanım 13.1.1. X kümesinin alt-kümelerinden oluşan bir $\mathfrak{F}$ ailesi verilsin. Eğer $\mathscr{F}$ ailesinin her sonlu sayıdaki kümelerinin arakesiti boş değilse; yani

$$(\{S_1, S_2, \ldots, S_n \in \mathfrak{F}\}) \Rightarrow S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n \neq \emptyset$$

ise, $\mathscr{F}$ ailesi Sonlu Arakesit Özeliğine (SA) [Finite Intersection Property] sahiptir, denilir.

Tanım 13.1.2. X üzerinde Sonlu Arakesit Özeliğine (SA) özeliğine sahip bir $\mathfrak{F}$ ailesi bir süzgecin alt-tabanıdır.

Uyarı 13.1.1. Her süzgeç Sonlu Arakesit Özeliğine sahiptir.

Tanım 13.1.3. X kümesi üzerinde bir $\mathscr{F}$ süzgeci verilsin. Eğer $\mathscr{F}$ ailesi $\subset$ kapsama bağıntısına göre, maximal (kendisinden ince bir süzgeç yok) ise $\mathscr{F}$ süzgecine X üzerinde bir aşkın süzgeçtir (ultrafilter), denilir.

Buna göre, aşkın süzgeci belirleyen iki aksiyomu şöyle ifade edebiliriz:

Tanım 13.1.4. Aşağıdaki iki aksiyomu sağlayan $\mathscr{F}$ ailesi X üzerinde bir aşkın süzgeçtir:

- [U1]: $\mathscr{F}$ ailesi X üzerinde bir süzgeçtir (dolayısıyla Sonlu Arakesit Özeliğine sahiptir).
- [U2]: $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ ve $\mathscr{G}$ Sonlu Arakesit Özeliğine sahipse $\mathscr{F} = \mathscr{G}$ dir.

Bir X kümesi üzerindeki bütün süzgeçlerin ailesini $\mathfrak{F}$ ile gösterelim. Bu aile kapsama bağıntısına göre tikel sıralı bir sistemdir; yani $(\mathfrak{F}, \subset)$ tikel sıralı bir sistemdir. Bu sistem içinde maximal öğeler (süzgeçler) aşkın (ultra) süzgeçlerdir.

Önerme 13.1.1. *X kümesi üzerinde bir $\mathscr{F}$ süzgeci için aşağıdakiler birbirlerine denktirler.*

1. *$\mathscr{F}$ aşkın (ultra) süzgeçtir.*
2. *$A, B \subset X$ ve $A \cup B \in \mathscr{F}$ ise ya $A \in \mathscr{F}$ ya da $B \in \mathscr{F}$ dir.*
3. *Her $A \subset X$ için ya $A \in \mathscr{F}$ ya da $A' \in \mathscr{F}$ dir. Ama ikisi birden olmaz.*

Çözüm:

- $(a) \Rightarrow (b)$: Olmayana Ergi Yöntemini kullanalım. $A \notin \mathscr{F}$ ve $B \notin \mathscr{F}$ olduğunu varsayalım.

  $$\mathscr{G} = \{C \mid \emptyset \neq C \subset X,\ A \cup C \in \mathscr{F}\}$$

  ailesini tanımlayalım. Bu ailenin X kümesi üzerinde bir süzgeç olduğu kolayca görülür. Ayrıca $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ ve $B \in \mathscr{G}$ dir. Oysa $\mathscr{F}$ aşkın (ultra) süzgeçtir. Öyleyse $\mathscr{F} = \mathscr{G}$ olmalıdır. O halde $B \in \mathscr{F}$ dir. Bu ise kabulümüzün çelişki yarattığını gösterir. Demek ki, $A \cup B \in \mathscr{F}$ olduğunda ya $A \in \mathscr{F}$ ya da $B \in \mathscr{F}$ olmalıdır.

- $(b) \Rightarrow (c)$: $A \cup A' = X \in \mathscr{F}$ dir. $A' = B$ konumuyla (b) özeliğinden ya $A \in \mathscr{F}$ ya da $A' \in \mathscr{F}$ çıkar.

- $(c) \Rightarrow (a)$: $\mathscr{F}$ süzgecinden daha ince bir $\mathscr{G}$ süzgecinin var olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $A \in \mathscr{G}$ kümesini düşünelim. Her $F \in \mathscr{F}$ için $A \cap F \neq \emptyset$ olduğundan, $A' \notin \mathscr{F}$ dir. O halde $A \notin \mathscr{F}$ dir. Dolayısıyla $\mathscr{G} = \mathscr{F}$ olacaktır; yani $\mathscr{F}$ den daha ince süzgeç yoktur ($\mathscr{F}$ maximaldir).

Yukarıdaki önermeye yeni özelikler katarak daha zengin bir sonuç elde edebiliriz.

Önerme 13.1.2. *Aşağıdaki özelikler birbirlerine denktir:*

1. *UP0: $\mathscr{U}$ ailesi X kümesi üzerinde aşkın (ultra) bir süzgeçtir.*
2. *UP1: $S \in \mathscr{U}$ ve $S \subset T$ ise $T \in \mathscr{U}$.*
3. *UP2: $S_1, S_2, \ldots, S_n \in \mathscr{U}$ ise $S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n \in \mathscr{U}$ dir.*
4. *UP3: Her $S \subset X$ için ya $S \in \mathscr{U}$ ya da $S' \in \mathscr{U}$ dir. Ama her ikisi aynı anda olmaz.*
5. *UP4: $T \subset X$ ve her $S \in \mathscr{U}$ için $T \cap S \neq \emptyset$ ise $T \in \mathscr{U}$ dir.*
6. *UP5: $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n \in \mathscr{U}$ ise $S_1, S_2, \ldots, S_n$ kümelerinden en az birisi $\mathscr{U}$ süzgecine aittir.*

7. UP6: $X \in \mathscr{U}$ dir.

İSPAT:

- $UP0 \Rightarrow UP1$: [S3] süzgeç aksiyomundan çıkar.

  Başka bir yöntem olarak, $\mathscr{U}$ süzgecine ait bir kümeyi kapsayan bütün kümelerin oluşturduğu ailenin $\mathscr{U}$ süzgecine eşit olduğunu gösterebiliriz.

  $$\mathscr{G} = \{T : T \subset X, (\exists S \in \mathscr{U})(S \subset T)\}$$

  ailesini tanımlayalım. $\mathscr{G}$ ailesi sonlu arakesit özeliğine sahiptir; yani her sonlu sayıda kümesinin arakesiti boş değildir. Çünkü $T_k \in \mathscr{G}$ ise $T_k \supset S_k$ olacak şekilde $S_k \in \mathscr{U}$, $(= 1, 2, \ldots, n)$, kümeleri vardır. Dolayısıyla,

  $$T_1 \cap T_2 \cap \ldots \cap T_n \supset S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n \neq \emptyset$$

  olur. Ayrıca $\mathscr{G}$ nin bir süzgeç olduğu ve $\mathscr{G} \supset \mathscr{U}$ olduğu kolayca görülebilir. $\mathscr{U}$ aşkın olduğundan $\mathscr{G} = \mathscr{U}$ olmalıdır.

- $UP1 \Rightarrow UP2$:

  $$\mathscr{G} = \{S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n \ : \ n \in \mathbb{N}, S_k \in \mathscr{U}\}$$

  ailesini tanımlayalım. Bu aile sonlu arakesit özeliğine sahiptir; yani her sonlu sayıda kümesinin arakesiti boş değildir. Ayrıca $\mathscr{G}$ nin bir süzgeç olduğu ve $\mathscr{G} \supset \mathscr{U}$ olduğu kolayca görülebilir. $\mathscr{U}$ aşkın olduğundan $\mathscr{G} = \mathscr{U}$. Bu isteneni verir.

- $UP2 \Rightarrow UP3$: Bir $S \subset X$ için $S \notin \mathscr{U}$ ise $S' \in \mathscr{U}$ olduğunu göstereceğiz. $\mathscr{G} = \{S_1\} \cup \mathscr{U}$ olsun. $\mathscr{G} \neq \mathscr{U}$ ve $\mathscr{G} \supset \mathscr{U}$ dur. $\mathscr{U}$ süzgeci sonlu arakesit özeliğine sahip maximal ailedir (aşkın süzgeç). Dolayısıyla $\mathscr{G}$ nin sonlu arakesit özeliği olamaz. Bu demektir ki $T_1 \cap T_2 \cap \ldots \cap T_n = \emptyset$ olacak şekilde $T_1, T_2, \ldots, T_n \in \mathscr{G}$ kümeleri vardır.

  [UP2] uyarınca $T = T_1 \cap T_2 \cap \ldots \cap T_n \in \mathscr{U}$ dur. $T \cap S = \emptyset$ olması $T \subset S'$ olmasını gerektirir. [UP3] uyarınca $S' \in \mathscr{U}$ dur.

  Son olarak $S \in \mathscr{U}$ ve $S' \in \mathscr{U}$ içermelerinin aynı anda olamayacağını gösterelim. Gerçekten $S \cap S' = \emptyset$ olduğundan, ikisi aynı anda süzgece ait olamaz; çünkü süzgeç sonlu arakesit özeliğine sahiptir.

- $UP3 \Rightarrow UP4$: [UP2] uyarınca $\mathscr{G} = \{T\} \cup \mathscr{U}$ sonlu arakesit özeliğine sahiptir. Dolayısıyla bir süzgeç olduğu ve $\mathscr{G} \supset \mathscr{U}$ olduğu kolayca görülür. $\mathscr{U}$ maximal olduğundan $\mathscr{G} = \mathscr{U}$ çıkar. O halde $T \in \mathscr{U}$ dur.

- $UP4 \Rightarrow UP5$:

  $$S = \bigcup_{k=1}^{n} S_k \in \mathscr{U} \Rightarrow S' = \bigcap_{k=1}^{n} S_k^{'} \notin \mathscr{U}$$

  olur. Buradan enaz bir k için $S_k^{'} \notin \mathscr{U}$ olduğu görülür. O halde, [UP3] uyarınca $S_k \in \mathscr{U}$ olacaktır.

- $UP5 \Rightarrow UP6$: Her $S \in \mathscr{U}$ için $S \cap X \neq \emptyset$ olduğundan [UP5] den istenen şey çıkar.

- $UP3 \Rightarrow UP0$: Listelediğimiz özeliklerden herhangi birisinin [UP0] özeliğini gerektirdiğini ispatlamak yetecektir. Bunu göstermek için daha genel olan aşağıdaki teoremi ispat edeceğiz.

Önerme 13.1.3. *X kümesi üzerinde sonlu arakesit özeliğine sahip bir $\mathscr{U}$ ailesinin aşkın süzgeç olması için gerekli ve yeterli koşul her $S \subset X$ için ya $S \in \mathscr{U}$ ya da $S' \in \mathscr{U}$ olmasıdır. (Tabii her ikisi aynı anda olamaz.)*

Gereklığı: Yukarıdaki problemde $\mathscr{U}$ aşkın bir süzgeç ise [UP3] özeliğinin varlığını gördük.

Yeterliği: $\mathscr{U}$ ailesi sonlu arakesit özeliğine sahip olsun ve bir $S \subset X$ için $(S \in \mathscr{U}) \vee (S' \in \mathscr{U})$ olduğunu varsayalım. Eğer $\mathscr{U}$ aşkın bir süzgeç değilse, sonlu arakesit özeliğine sahip bir $\mathscr{G} \supset \mathscr{U}$ ailesi vardır. Bir $S \in \mathscr{G}$ kümesi alalım. $S' \in \mathscr{U} \subset \mathscr{G}$ olsaydı, $S \in \mathscr{G}$ nin sonlu arakesit özeliğine sahip olma kabulümüz ile çelişirdi. Çünkü $S \cap S' = \emptyset$ olur. O halde $S \in \mathscr{U}$ dur. Her $S \in \mathscr{G}$ için bu özelik var olduğuna göre $\mathscr{U} = \mathscr{G}$ sonucu çıkar.

Önerme 13.1.4. *$\mathscr{U}$ ailesinin X kümesi üzerinde aşkın bir süzgeç olması için gerekli ve yeterli koşul, her $U \in \mathscr{U}$ ile kesişen her $A \subset X$ için kümesinin $\mathscr{U}$ ye ait olmasıdır; yani*

$$(A \subset X) \wedge (\forall U \in \mathscr{U})(A \cap U \neq \emptyset) \Rightarrow A \in \mathscr{U}$$

olmasıdır.

İspat: (Bkz. Teocor 13.1.2(5))

Önerme 13.1.5. *$\mathscr{U}$ ailesi X kümesi üzerinde aşkın bir süzgeç ve $f : X \to Y$ ise $f(\mathscr{U})$ görüntüsü Y üzerinde aşkın bir süzgeçtir.*

İspat: Teorem 13.1.2(4) uyarınca,

$$\begin{aligned} A \notin f(\mathscr{U}) &\Rightarrow f^{-1}(A) \notin \mathscr{U} \\ &\Rightarrow (f^{-1}(A))' \in \mathscr{U} \\ &\Rightarrow A' \in f(\mathscr{U}) \end{aligned}$$

olur.

Örnekler:

1. $\mathscr{M}_x = \{A : x \in A \subset X\}$ ailesi; yani sabit bir $x \in X$ noktsını içeren kümeler ailesi X üzerinde bir süzgeçtir (Bkz. 13.5.4.Problem).

2. Yalnıx x noktasından oluşan kümenin oluşturduğu tek öğeli aile; yani $\mathfrak{X} = \{\{x\}\}$ ailesi yukarıda tanımlanan $\mathscr{M}_x$ süzgeci için bir tabandır.

3. $\mathscr{S}_A = \{S : A \subset S \subset X\}$ ailesi; yani bir A kümesini kapsayan bütün kümelerin oluşturduğu aile X üzerinde bir süzgeçtir.

4. Yukarıdaki örnekte $A = X$ alınırsa $\mathfrak{X} = \{X\}$ ailesi X üzerinde bir süzgeç olur. Bu süzgeç X üzerindeki en kaba süzgeçtir.

5. X kümesi içinde bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi verilsin. $A_n = \{x_k : 1 \leq n \leq k\}$ diyelim. Herhangi bir A_n kümesini kapsayan bütün kümeler ailesi; yani $\mathscr{D} = \{D : (\exists n \geq 1)(A_n \subset D\}$ ailesi bir süzgeçtir. Buna (x_n) dizisinin *ilkel (elementary)* süzgeci denilir.

6. $\mathscr{C} = \{A : A \subset X, A' \,\text{sonlu}\}$ ailesi; yani X kümesi içinde tümleyenleri sonlu olan bütün kümelerin oluşturduğu aile bir süzgeçtir. *Buna Sonlu Tümleyenler Süzgeci (cofinite filter)* denilir.

7. Yukarıdaki X kümesi yerine $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi alınırsa Fréchet süzgeci elde edilir. Fréchet süzgeci Doğal Sayılar kümesi üzerindeki Sonlu Tümleyenler (cofinite) süzgecidir.

8. X kümesi içinde bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi verilsin. (x_n) kümesi üzerindeki Sonlu Tümleyenler Süzgecine (x_n) dizisinin bileşen süzgeci denilir.

9. X kümesi içinde bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi verilsin. $B_n = \{x_k : n \leq k\}$ diyelim. B_n kümesine (x_n) dizisinin n-inci kuyruğu denilir. Kuyruklar ailesi (x_n) dizisinin bileşen süzgeci için bir tabandır; yani $\mathscr{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümeler ailesi, yukarıda tanımlanan bileşen süzgecin bir tabanıdır.

10. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinde bir $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisini düşünelim. $B_n = \{k : n \leq k\}$ diyelim. B_n kümesine (n) dizisinin n-inci kuyruğu denilir. Kuyruklar ailesi (n) dizisinin Fréchet süzgeci için bir tabandır; yani $\mathscr{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümeler ailesi, yukarıda tanımlanan Fréchet süzgecinin bir tabanıdır. $(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay ve $\mathscr{B}(x)$ ailesi x noktasının komşuluklar ailesi olsun. Bu aile bir süzgeçtir. Buna x noktasının komşuluklar süzgeci denilir.

11. $(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay ve $\mathfrak{S}(x)$ ailesi x noktasının bir komşuluklar tabanı olsun. Bu aile x noktasının komşuluklar süzgecinin bir tabanıdır.

12. Bir süzgeçler ailesinin en büyük alt sınırı (inf), sözkonusu ailenin arakesidir (Bkz. Önerme 13.2.1):

$$\mathscr{S} = \bigcap_{\imath\in I} \mathscr{S}_\imath = \{S : (\forall \imath \in I)(S \in \mathscr{S}_\imath)\} \tag{13.1}$$

13. (13.1) süzgeci aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$\mathscr{S} = \bigcap_{\imath\in I} \mathscr{S}_\imath = \{A : (\exists S_\imath \in \mathscr{S}_\imath)(A = \bigcup_{\imath\in I} S_\imath)\} \tag{13.2}$$

İSPAT:

$$\begin{aligned} B \in \bigcap_{\imath \in I} \mathscr{S}_\imath &\Rightarrow (\forall \imath \in I)(B \in \mathscr{S}_\imath) \\ &\Rightarrow \left[(B = S_\imath) \Rightarrow (A = \bigcup_{\imath \in I} S_\imath) \right] \end{aligned}$$

olur. Tersine olarak,

$$\begin{aligned} B \in \{A : (\exists S_\imath \in \mathscr{S}_\imath)(A = \bigcup_{\imath \in I} S_\imath) &\Rightarrow (\exists S_\imath \in \mathscr{S}_\imath)(B = \bigcup_{\imath \in I} S_\imath) \\ &\Rightarrow (\forall \imath \in I)(B \in \mathscr{S}_\imath) \\ &\Rightarrow B \in \bigcap_{\imath \in I} \mathscr{S}_\imath \end{aligned}$$

14. BIR SÜZGEÇLER AILESININ EN KÜÇÜK ÜST SINIRI (sup) (Bkz. Önerme 13.2.5).