Bölüm 12

Ağlar

12.1 AĞLARIN YAKINSAMASI

12.1.1 Problemler

1. Doğal sayılar kümesinin $\leq$ bağıntısına göre yönlenmiş bir küme olduğunu gösteriniz.

   ÇÖZÜM: Doğal sayılar kümesinin, $\leq$ bağıntısına göre Tanım 12.1.1 koşullarını sağladığını göstermeliyiz:

   (a) Her n için $n \leq n$ dir.

   (b) Her m, n, r için $m \leq n$ ve $n \leq r$ ise $m \leq r$ dir.

   (c) Her m, n doğal sayı çifti için $\nu = \max\{m, n\} + 1$ sayısı $m \leq \nu$ ve $n \leq \nu$ koşulunu sağlar.

2. `Tanım 12.1.1` deki (iii) koşulu yerine daha güçlü olan aşağıdaki koşulun konulabileceğini gösteriniz:

   Sonlu sayıda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ öğelerine karşılık

   $$\lambda_1 \leq \lambda,\ \lambda_2 \leq \lambda,\ \ldots, \lambda_n \leq \lambda \tag{12.1}$$

   eşitsizlikleri sağlayan bir $\lambda \in \Lambda$ öğesi vardır.

   ÇÖZÜM: (12.1) koşulu sağlanıyorsa $n = 2$ alınarak (iii) koşulu elde edilebilir; yani (12.1) $\Rightarrow (iii)$ dir. Şimdi bunun karşıtının varlığını gösterelim. Sonlu sayıda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ öğeleri verilsin. (iii) sağlanıyorsa,

   (a) λ_1, λ_2 öğelerine karşılık $\lambda_1 \leq \nu_3$ ve $\lambda_2 \leq \nu_3$ olan bir $\nu_3 \in \Lambda$ vardır.

   (b) ν_3, λ_3 öğelerine karşılık $\lambda_3 \leq \nu_4$ ve $\nu_3 \leq \nu_4$ olan bir $\nu_4 \in \Lambda$ vardır.

   (c) ν_4, λ_4 öğelerine karşılık $\lambda_4 \leq \nu_5$ ve $\nu_4 \leq \nu_5$ olan bir $\nu_5 \in \Lambda$ vardır.

   (d) ...

   (e) ν_n, λ_n öğelerine karşılık $\lambda_n \leq \lambda$ ve $\nu_n \leq \lambda$ olan bir $\lambda \in \Lambda$ vardır.

3. $(X, \mathscr{T})$ uzayında x noktasının $\mathscr{B}(x)$ komşuluklar ailesinin yönlenmiş bir sistem olduğunu gösteriniz.

   ÇÖZÜM: $\mathscr{B}(x)$ üzerindeki sıralama bağıntısını $U, V \in \mathscr{B}(x)$ olduğunda

   $$U \leq V \Leftrightarrow U \supset V \tag{12.2}$$

   bağıntısı ile tanımlayalım. Bu sıralamanın Tanım 12.1.1 koşullarını sağladığını göstereceğiz.

   (a) Her $V \in \mathscr{B}(x)$ için $V \leq V \Leftrightarrow V \supset V$ dir.

   (b) Her $U, V, W \in \mathscr{B}(x)$ için $U \leq V \Leftrightarrow U \supset V$ ve $V \leq W \Leftrightarrow V \supset W$ ise $U \leq W \Leftrightarrow U \supset W$ dur.

   (c) Her $U, V \in \mathscr{B}(x)$ için $W = U \cap V$ dersek $U \leq W \Leftrightarrow U \supset W$ ve $V \leq W \Leftrightarrow V \supset W$ olur.

4. Kapalı $[a, b]$ aralığında bir f fonksiyonunun Riemann integrali tanımlanırken $[a, b]$ aralığının

   $$a = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n = b \tag{12.3}$$

   bölüntüleri kurulur ve en büyük $[a_{i-1}, a_i]$ alt aralığının uzunluğu sıfıra giderken, Riemann toplamlarının inf ve sup değerlerinin olup olmadığına bakılır. Alt aralıkları iç-içe olan (12.3) bölüntülerinin yönlenmiş bir sistem oluşturduklarını gösteriniz.

   ÇÖZÜM: Simgelerde basitliği sağlamak için bölüntüleri $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ harfleriyle gösterelim; yani

   $$\alpha \equiv \{a = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n = b\} \tag{12.4}$$

   $$\beta \equiv \{a = b_0 < b_1 < b_2 < b_3 < \ldots < b_m = b\} \tag{12.5}$$

   $$\gamma \equiv \{a = c_0 < c_1 < c_2 < c_3 < \ldots < c_r = b\} \tag{12.6}$$

   diyelim. Bir α bölüntüsü içindeki en büyük alt aralığın uzunluğunu $||\alpha||$ ile gösterelim; yani

   $$||\alpha|| = \max\{|a_i - a_{i-1}| : i = 1, 2, \ldots, n\} \tag{12.7}$$

   olsun. Bunu kullanarak bölüntüler üzerinde sıralama bağıntısı tanımlayabiliriz:

   $$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow ||\alpha|| \geq ||\beta|| \tag{12.8}$$

   diyelim. Bu sıralamanın Tanım 12.1.1 koşullarını sağladığını göstereceğiz. $[a, b]$ nin bütün mümkün bölüntülerinin ailesini $\mathfrak{B}$ ile gösterelim.

   (a) Her $\alpha \in \mathfrak{B}$ için $\alpha \leq \alpha$ dır.

(b) Her $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{B}$ için $\alpha \leq \beta$ ve $\beta \leq \gamma$ ise $\alpha \leq \gamma$ olur.

(c) Her $\alpha, \beta \in \mathfrak{B}$ için γ bölüntüsünü α ve β bölüntülerinin bütün noktalarından oluşturalım. Bu noktaları $[a, b]$ aralığına büyüklük sırasına göre yerleştirebiliriz. Bunun için γ nın c_i bölüntü noktalarını her $i = 1, 2, 3, \ldots, \max\{n, m\}$ için

$$c_i = \begin{cases} a_i & a_i \leq b_i \\ b_i & b_i < a_i \end{cases}$$

sıralama kuralıyla seçmek yetecektir. Bu durumda $||\alpha|| \geq ||\gamma||$ ve $||\beta|| \geq ||\gamma||$ olacağı açıktır. O halde her $\alpha, \beta \in \mathfrak{B}$ için $\alpha \leq \gamma$ ve $\beta \leq \gamma$ olacak biçimde bir $\gamma \in \mathfrak{B}$ bölüntüsü oluşturmuş olduk.

5. Bir topolojik uzayda bir x noktası alalım ve bu noktaya karşılık

$$\mathscr{D}_x = \{(U, t) |\ U \in \mathscr{B}\ (x), t \in U\} \tag{12.9}$$

kümesini tanımlayalım. Bu kümenin

$$(U, t) \preceq (V, z) \Leftrightarrow U \supset V \tag{12.10}$$

bağıntısına göre yönlenmiş bir küme olduğunu gösteriniz. Sonra, öğeleri $\mathscr{D}_x$ kümesiyle damgalanan

$$\{t \,|\, (U, t)\ \in \mathscr{D}_x\} \tag{12.11}$$

ağının x noktasına yakınsadığını ispatlayınız.

Çözüm: (12.9) kümesinin (12.10) sıralama bağıntısına göre yönlenmiş bir sistem olduğunu göstermek için Tanım 12.1.1 koşullarını sağladığını göstermeliyiz.

1. Her $(U, t)\ \in \mathscr{D}_x$ için $(U, t) \preceq (U, t)$ dir.

2. $(U, u) \preceq (V, v)$ ve $(V, v) \preceq (W, w)$ ise $U \supset V \supset W$ dur. O halde (12.10) uyarınca $(U, u) \preceq (W, w)$ olacaktır.

3. $(U, u), (V, v)\ \in \mathscr{D}_x$ için $W = U \cap V \in \mathscr{B}$ olduğundan $(U, u) \preceq (W, w) \Leftrightarrow U \supset W$ ve $(V, v) \preceq (W, w) \Leftrightarrow V \supset W$ olduğu açıktır.

   O halde (12.9) ile tanımlanan $\mathscr{D}_x$ ailesi yönlenmiş bir sistemdir.

   (12.11) ile tanımlanan $\{t_{(U,t)}\} = \{t : (U, t) \in \mathscr{D}_x\}$ öğeleri (12.9) yönlenmiş sistemi ile damgalandığı için bir ağdır. Bu ağın x noktasına yakınsadığını görmek için Tanım 12.1.4 koşullarının sağlandığını göstermeliyiz. Bir $U \in \mathscr{B}(x)$ verilsin. $V \subset U$ olduğunda $(U, t) \preceq (V, t)$ dir; dolayısıyla $t_{(V,t)} \in V$ olur.

12.2 AĞLARIN YETERLİĞİ

12.2.1 Problemler

1. Bir a noktasının bir A kümesinin bir yığılma noktası olması için gerekli ve yeterli koşul $(A - \{a\})$ içinde A noktasına yakınsayan bir ağın varlığıdır. Gösteriniz.

   Çözüm: Ayrık (singular) olmayan kaplama noktası bir yığılma noktasıdır. Önerme 12.2.1 uyarınca $a \in \bar{A}$ olması için gerekli ve yeterli koşul $a_\lambda \to a$ olan bir (a_λ) ağının varlığıdır. Buna göre problemi çözebiliriz.

   Gerekliği:
   $$a \in \tilde{A} \Leftrightarrow [V \in \mathscr{B}(a) \Rightarrow V \cap (A - \{a\}) \neq \emptyset]$$
   dir. O halde her $V \in \mathscr{B}(a)$ için bir $a_V \in V$ öğesi seçebiliriz. $\mathscr{B}(a)$ yönlenmiş bir sistem olduğundan (a_V) bir ağdır ve $a_V \to a$ dır.

   Yeterliği: $a_\lambda \to a$ ise her $V \in \mathscr{B}(a)$ için (a_λ) ağının kuyruğu V içinde kalır. Öyleyse, $V \cap A \neq \emptyset$ dir. O halde $a \in \bar{A}$ dir.

2. Bir topolojik uzayda x noktasının (x_λ) ağının bir yığılma noktası olması için gerekli ve yeterli koşul, (x_λ) ağının bir alt-ağının x noktasına yakınsamasıdır. Gösteriniz.

   Çözüm: $A = \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ diyelim.
   $$\begin{aligned} x \in \tilde{A} &\Leftrightarrow [V \in \mathscr{B}(x) \Rightarrow V \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset] \\ &\Leftrightarrow [V \in \mathscr{B}(x) \Rightarrow (\exists\, a_{\lambda_V} \in V) \\ &\Leftrightarrow a_{\lambda_V} \to a \end{aligned}$$
   çıkar. □

3. X kümesi üzerinde $\mathscr{T}_1 \leq \mathscr{T}_2$ koşulunu sağlayan $\mathscr{T}_1$ ve $\mathscr{T}_2$ topolojileri varsa, bir ağın bu topolojilere göre yakınsamaları arasındaki fark nedir?

   Çözüm: İnce topolojiye göre yakınsak olan ağ, kaba topolojiye göre de yakınsar.

4. İçindeki her ağ her noktasına yakınsıyorsa, uzay ayrık değildir. Gösteriniz.

   Çözüm: $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayında bir (a_λ) ağı verilsin. Her $x \in X$ için $a_\lambda \to x$ ise, her $V \in \mathscr{B}(x)$ için (a_λ) ağının kuyruğu V içinde kalır. $x \in T \subset V$ olacak biçimde açık bir $T \in \mathscr{T}$ kümesi seçebiliriz. $T \in \mathscr{B}(x)$ olduğundan (a_λ) ağının kuyruğu T içinde kalır.

   Verilen koşul altında $T = X$ olduğunu göstermeliyiz; yani uzayın boş olmayan tek açık kümesinin X olduğunu göstermeliyiz.

   Eğer $T \neq X$ ise bir $y \notin T$ noktası vardır. Eğer $y \in (T')^o$ olsaydı, hipotez gereğince $y \in X$ için $a_\lambda \to y$ olacaktır. $y \in (T')^o \in \mathscr{B}(y)$ olduğundan (a_λ) ağının kuyruğu $(T')^o$ içinde kalır. $T \cap (T')^o = \emptyset$ olduğundan, bu durum yukarıda söylenenle çelişir; çünkü yakınsak bir ağın kuyruğu birbirlerinden ayrık iki açık küme içinde bulunamaz. Öyleyse, kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla hiç bir $y \in (T')^o$ öğesi varolamaz. Buradan,

$$\begin{aligned}(T')^o = \emptyset &\Rightarrow (T')^o = (\bar{T})' = \emptyset\\ &\Rightarrow (T')^o = (\bar{T})' = \emptyset\\ &\Rightarrow \bar{T} = X\\ \Rightarrow T = (\bar{T})^o = (X)^o &\\ \Rightarrow T = X &\end{aligned}$$

çıkar.

5. Ayrık bir uzayı ağların yakınsaması ile belirleyebilir misiniz?

   ÇÖZÜM: İçindeki her yakınsak ağın kuyruğu sabit ise uzay ayrık bir uzaydır.

6. (x_λ) ağı x limitine yakınsıyorsa, her alt ağının da aynı noktaya yakınsadığını gösteriniz.

   ÇÖZÜM: $(a_{\lambda_\imath}) \subset (a_\lambda)$ ve $a_\lambda \to a$ olsun.

$$\begin{aligned}a_\lambda \to a &\Longrightarrow [V \in \mathscr{B}(a) \Rightarrow (\exists\, \lambda_0)(\lambda_0 \leq \lambda \Rightarrow a_\lambda \in V]\\ &\Longrightarrow [V \in \mathscr{B}(x) \Rightarrow (\exists\, \lambda_0)(\lambda_0 \leq a_{\lambda_\imath} \Rightarrow a_{\lambda_\imath} \in V]\\ &\Longrightarrow a_{\lambda_\imath} \to a\end{aligned}$$

   olur.