Bölüm 11

D İ Z İ L E R

Yakinsama ve
Analiz

11.1 PROBLEMLER

1. Ayrık olmayan bir uzaydaki her dizinin, uzayın her noktasına yakınsadığını gösteriniz.

   Çözüm $(X, \mathscr{T})$ ayrık olmayan uzay ise $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$ dir. Her hangi bir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ dizisi verilsin. Herhangi bir $x \in X$ noktasının bir tek komşuluğu X kümesidir. Bu durumda, $a_n \to x$ yakınsaması için Tanım 11.1.2 yakınsaklık tanımının sağlandığı görülür.

2. Ayrık bir uzayda bir (a_n) dizisinin bir a noktasına yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul belli bir damgadan sonraki bütün a_n terimlerinin a ya eşit olmasıdır.Gösteriniz.

   Çözüm $(X, \mathscr{A})$ ayrık uzay ise, her $x \in X$ için tek öğeden oluşan $\{x\}$ kümesi açık bir kümedir. $a_n \to a$ olması için, belli bir n_o indisinden büyük indisli bütün a_n terimlerinin $\{a\}$ kümesi içinde olması gerekir. Bu ise

   $$n \geq n_o \Rightarrow a_n \in \{a\} \Rightarrow a_n = a$$

   olması demektir.

3. Sonsuz bir X kümesi üzerinde $\mathscr{T}$ topolojosi olarak boş küme ile sayılabilir bütün alt-kümelerin tümleyenlerini alalım. Bir (a_n) dizisinin bir a limitine yakınsaması için, belli bir damgadan sonraki bütün a_n terimlerinin a ya eşit olması gerekli ve yeterlidir. Gösteriniz.

Çözüm $(X, \mathscr{T})$ sonlu tümleyenler topolojisi ise, $\mathscr{T} = \{T : T = \emptyset \vee T'$ sayılabilir$\}$ dir. Olmayana Ergi Yöntemini kullanalım. $a_n \to a$ olduğunu varsayalım. Dizinin sonsuz tane teriminin a dan farklı olduğunu varsayalım. Sonlu sayıdası a ya eşitse, onları diziden atalım. Geriye kalan sonsuz diziyi gene $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ile gösterirsek genelikten bir şey yitirmeyiz. $A' = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ sayılabilir bir küme olduğundan, bu kümenin tümleyeni açık bir küme olmalıdır; yani $A \in \mathscr{T}$ dir. $a \notin A'$ olduğundan, $a \in A \Rightarrow A \in \mathscr{B}(a)$ olacaktır. Hiçbir a_n terimi A komşuluğu içinde olmayacağından (a_n) dizisi a noktasına yakınsayamaz. Oysa $a_n \to a$ olduğunu varsaymıştık. Bu çelişki olamayacağına göre, kabulümüz yanlıştır; yani dizinin sonsuz terimi a limitine eşit olmalıdır. Bu demek, $(\exists n_o)(n \geq n_o \Rightarrow a_n = a$ olmalıdır.

4. `Tanım 11.1.2` de komşuluklar ailesi yerine yerel tabanın konulabileceğini gösteriniz.

Çözüm Topolojik uzayda bir x noktasının her W komşuluğu, yerel tabana ait bir V kümesini kapsayacaktır. V kümesi de bir komşuluk olduğuna göre, tanımda W yerine V konulabilir.

5. *Birinci Sayılabilme Aksiyomunu-BSA*- sağlayan bir topolojik uzayda bir (x_n) dizisi verilsin. Bir x noktasının bu dizinin bir yığılma noktası olması için gerekli ve yeterli koşul, verilen dizinin x noktasına yakınsayan bir alt dizisinin varlığıdır. Gösteriniz.

Çözüm BSA sağlayan uzayda her x noktasının

$$v_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_n \supset \cdots$$

biçiminde iç-içe bir koşuluklar tabanı (yerel taban) vardır. $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ diyelim.

$$\begin{aligned} x \in \bar{A} &\Leftrightarrow [(\forall n)(V_n \cap A \neq \emptyset)] \\ &\Leftrightarrow [(\forall n)(\exists k_n)(a_{n_k} \in V_n)] \\ &\Leftrightarrow [a_{n_k} \to x] \end{aligned}$$

6. Gerçel sayılardan oluşan bir (x_n) dizisinin, salt topolojiye göre, bir x sayısına yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul, her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \epsilon$$

olacak biçimde doğal bir n_0 sayısının varlığıdır. Gösteriniz.

Çözüm 4.problemde, Tanım 11.1.2-inci tanımdaki $\mathscr{B}(x)$ komşuluklar ailesi yerine bir yerel tabanın konulabileceğini söyledik. $\{(x-\epsilon, x+\epsilon) : \epsilon > 0\}$ ailesinin x noktası için bir yerel taban olduğunu da biliyoruz. O halde

$$|x_n - x| < \epsilon \Leftrightarrow x \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$$

bağıntısı isteneni verir.

7. Genel terimi yinelgen (recursive) olarak ($a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$) biçiminde tanımlanan *Fibonacci* dizisinin salt topolojiye göre ıraksayan bir dizi olduğunu gösteriniz.

Çözüm *Fibonacci* dizisinin ilk iki terimi $a_0 = 0$ ve $a_1 = 1$ olarak tanımlanır. Öteki terimlerin hepsi, verilen yinelge kuralından çıkarılabilir. Dizinin baştaki bir kaç terimini yazarsak,

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

bulunur.

1.Yol: Yakınsak gerçel bir dizinin bir Cauchy dizisi olması gerektiğini biliyoruz. Olmayana Ergi Yöntemini kullanmak için, Fibonacci dizisinin bir Cauchy disi olmadığını gösterirsek, onun ıraksak bir dizi olduğu ortaya çıkar. Gerçekten, (a_n) bir Cauchy dizisi olsaydı,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0)[n_0 < n, m \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon$$

olurdu. Oysa, n yerine $n + 2$ ve m yerine $n + 1$ koyarsak verilen yinelge bağıntısından, örneğin,

$$4 < n \Rightarrow |a_{n+2} - a_{n+1}| = |a_n| \geq 5$$

yazabiliriz. Bu iki sonuç bir çatışkı yarattığına göre, kabulümüz yanlıştır; yani Fibonacci dizisi bir Cauchy dizisi değildir; dolayısıyla ıraksar.

2.Yol: Cauchy dizisi kavramını kullanmadan, problemin çözümünü doğrudan yapabiliriz. Gene Olmayana Ergi Yöntemini kullanalım. Varsayalım ki (a_n) dizisi a ya yakınsıyor olsun.

$$a_n \to a \Longrightarrow [(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0)(n_0 < n \Rightarrow |a_{n+2} - a| < \frac{1}{2}\epsilon]$$

$$a_n \to a \Longrightarrow [(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0)(n_0 < n \Rightarrow |a_{n+1} - a| < \frac{1}{2}\epsilon]$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} n_0 < n \Longrightarrow & |a_{n+2} - a_{n+1}| \\ \Longrightarrow & = |a_{n+2} - a + a - a_{n+1}| \\ \Longrightarrow & \leq |a_{n+2} - a| + |a - a_{n+1}| \\ \Longrightarrow & < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon] \end{aligned}$$

olması gerektiği sonucu çıkar. Öte yandan, verilen yinelge bağıntısından, örneğin,

$$4 < n \Rightarrow |a_{n+2} - a_{n+1}| = |a_n| \geq 5$$

çıkar. Bu iki sonuç bir çatışkı yarattığına göre, kabulümüz yanlıştır; yani Fibonacci dizisi bir Cauchy dizisi değildir; dolayısıyla ıraksar.

8. Yakınsak bir dizinin her alt dizisinin de yakınsak ve aynı limite sahip olduğunu gösteriniz.

Çözüm (a_n) dizisi a limitine yakınsıyor olsun ve bir dizi olsun ve $(a_{n_k}) \subset (a_n)$ alt-dizisi verilsin.

$$\begin{aligned} a_n \to a &\iff (\forall W \in \mathscr{B}(a))(\exists n_0)\,[n_0 < n \Rightarrow a_n \in W] \\ &\iff (\forall W \in \mathscr{B}(a))(\exists n_0)\,[n_0 < n_k \Rightarrow a_{n_k} \in W] \\ &\iff a_{n_k} \to a \end{aligned}$$

olur.

9. Aşağıdaki dizilerin herbirisinin, varsa, (salt topolojiye göre) limit ve yığılma noktalarını bulunuz:

   (a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = 3$ diye tanımlanan (a_n) sabit dizisi.

   ÇÖZÜM: (a_n) bütün terimleri 3 e eşit olan sabit bir dizidir. Limiti 3 tür. Yığılma noktası yoktur.

   (b) Belli bir n_0 indisinden sonra terimleri sabit olan dizi; yani

   $$a_n = \begin{cases} n, & n \leq n_0 \\ a, & n > n_0,\ a \quad \text{sabit} \end{cases} \tag{11.1}$$

   biçiminde tanımlanan (a_n) dizisi.

   ÇÖZÜM: n_0 indisli terimden sonraki bütün terimler sabit a sayısına eşit olduğundan, dizinin limiti a dır. Yığılma noktası yoktur.

   (c) Genel terimi $a_n = 5 - \frac{5}{n}$ olan (a_n) dizisi.

   ÇÖZÜM: 5 sayısı, dizinin hem limiti hem yığılma noktasıdır.

   (d) Genel terimi $a_n = 7 + \frac{7}{n}$ olan (a_n) dizisi.

   ÇÖZÜM: 7 sayısı, dizinin hem limiti hem yığılma noktasıdır.

   (e) Genel terimi $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ olan (a_n) dizisi.

   ÇÖZÜM: 0 sayısı, dizinin hem limiti hem yığılma noktasıdır.

   (f) Genel terimi $a_n = n$ olan (a_n) dizisi.

   ÇÖZÜM: Dizinin limiti yoktur (ıraksak), yığılma noktası yoktur.

   (g) Genel terimi $a_n \equiv n \pmod 3$ olan (a_n) dizisi.

   ÇÖZÜM: Dizinin yalnızca 3 farklı terimi vardır: $\{[0], [1], [2]\}$. Dizinin limiti ve yığılma noktası yoktur.

   (h) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ fonksiyonu $f(n) = \frac{1}{n}$ diye tanımlanan bire-bir-içine bir fonksiyon olmak üzere, $a_n = f(n)$ dizisi. [Böyle bir fonksiyonun varlığını gösteriniz.]

   ÇÖZÜM: Sözkonusu dizi $[0, 1]$ aralığındaki rasyonel sayıların oluşturduğu kümeden seçilmektedir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ olduğundan f fonksiyonu tanımlıdır. $Q \cap [0, 1]$ üzerine salt topolojinin kondurduğu alt-uzay topolojisine göre $\frac{1}{n} \to 0$ dır. O halde dizinin limiti vardır. Ayrıca 0 noktası dizinin biricik yığılma noktasıdır.

10. Her gerçel sayının rasyonel sayılar kümesinin bir yığılma noktası olduğunu; yani her $x \in \mathbb{R}$ için $x \in \tilde{\mathbb{Q}}$ olduğunu gösteriniz.

    ÇÖZÜM: Her hangi bir $x \in \mathbb{R}$ verilsin. Rasyonel sayılar $\mathbb{R}$ içinde yoğun olduğundan (bkz.Önerme 4.1.9), her $\epsilon > 0$ sayısı için $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ aralığı x den farklı bir rasyonel sayı (dolayısıyla sonsuz rasyonel sayı) içerir. O halde x gerçel sayısı $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin bir yığılma noktasıdır.

    Benzer düşnüşle, her gerçel sayının, $\mathbb{Q}'$ irrasyonel sayılar kümesinin bir yığılma noktası olduğu görülür.

11. $\mathbb{R}$ üzerindeki salt topolojiye göre $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin hiç bir yığılma noktası olmadığını gösteriniz.

    ÇÖZÜM: Bir $m \in \mathbb{N}$ verilsin. Öyle bir $\epsilon > 0$ sayısı seçilebilir ki

    $$[m \in (m - \epsilon, m + \epsilon)] \wedge [m \neq n \Rightarrow n \notin (m - \epsilon, m + \epsilon)$$

    olur. $(m - \epsilon, m + \epsilon) = T$ açık kümesi m noktasının bir komşuluğudur ve $(\mathbb{N} - \{m\}) \cap T = \emptyset$ olur. O halde m noktası $\mathbb{N}$ kümesinin bir yığılma noktası olamaz.

12. $\mathbb{R}$ üzerindeki salt topolojiye göre $S = (0, 1) \cup \{3\}$ kümesinin yığılma noktalarını bulunuz.

    ÇÖZÜM: 3 noktası S nin bir ayrık (singular) noktasıdır. $(0, 1)$ açık aralığındaki her nokta S nin bir yığılma noktasıdır; yani $\tilde{S} = (0, 1)$ dır.

11.2 DİZİLERE EK PROBLEMLER

Cauchy Dizisi (a_n) bir gerçel ya da karmaşık sayı dizisi olsun. İndisleri yeterince büyük seçilerek terimleri birbirlerine istenildiği kadar yaklaştırılabiliyorsa (a_n) dizisine bir Cauchy dizisidir, denilir. Bunun simgesel ifadesi şöyledir:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0)(n_0 < n, m \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon$$

Bu kavram ileride metrik uzaylara genelleştirilecek ve tamlık kavramını tanımlayan bir araç haline gelecektir.

1. Gerçel ya da karmaşık sayılardan oluşan yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.

    Çözüm: (a_n) dizisi a ya yakınsıyor olsun.

    $$a_n \to a \Longrightarrow [(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0)(n_0 < n \Rightarrow |a_n - a| < \frac{1}{2}\epsilon]$$

    $$a_n \to a \Longrightarrow [(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0)(n_0 < m \Rightarrow |a_m - a| < \frac{1}{2}\epsilon]$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} n_0 < m, n \Longrightarrow |a_n - a_m| &= |a_n - a + a - a_m| \\ &\Longrightarrow \leq |a_n - a| + |a - a_m| \\ &\Longrightarrow < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon \end{aligned}$$

bulunur. O halde (a_n) dizisi yakınsıyorsa bir Cauchy dizisidir.

2. Gerçel ya da karmaşık sayılardan oluşan (a_n) dizisi a ya yakınsıyor ise $(a_n - a)$ dizisi 0 limitine yakınsar. Gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} a_n \to a &\Longleftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0)\left[n_0 < n \Rightarrow |a_n - a| < \frac{1}{2}\epsilon\right] \\ &\Longleftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0)\left[n_0 < n \Rightarrow a_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)\right] \\ &\Longleftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0)\left[n_0 < n \Rightarrow (a_n - a) \in (-\epsilon, +\epsilon)\right] \\ &\Longleftrightarrow (a_n - a) \to 0 \end{aligned}$$