Bölüm 10

BÖLÜM UZAYLARI

10.1 BÖLÜM TOPOLOJİSİ

10.2 KARMA PROBLEMLER

1. Bir topolojik uzay üzerinde ***eşitlik*** bağıntısı bir denklik bağıntısı olarak düşünülebilir. Buna göre oluşacak bölüm uzayını bulunuz.

   Çözüm 1 $(X, \mathscr{T})$ uzayı üzerinde β bağıntısı $x\beta y \Leftrightarrow x = y$ biçiminde tanımlanırsa $X/\beta = X$ olacağından bölüm topolojisi $\mathscr{T}$ ye eşit olur.

2. $(X, \mathscr{T})$ uzayı üzerinde β bağıntısı bir denklik bağıntısı olsun. Bölüm uzayını $(X/\beta, \mathscr{T}_\beta)$ ile gösterelim.

   (a) $\varphi : X \to X/\beta$ bölüm dönüşümünün açık bir dönüşüm olması için gerekli ve yeterli koşul, her $A \subset X$ alt-kümesi için $\varphi(A^\circ) = (\varphi(A))^\circ$ olmasıdır. Gösteriniz.

   (b) Benzer olarak, bölüm dönüşümünün kapalı bir dönüşüm olması için gerekli ve yeterli koşul her $A \subset X$ alt-kümesi için $\varphi(\bar{A}) = \overline{(\varphi(A))}$ olmasıdır. Gösteriniz.

   Çözüm 2

   (a) $\varphi : X \to X/\beta$ bölüm dönüşümü açık bir dönüşüm ise her $A \subset X$ alt-kümesi için

$$
\begin{aligned}
A \in \mathscr{T} &\Rightarrow \varphi(A) = \varphi(A^\circ) \in \mathscr{T}_\beta \\
&\Rightarrow \varphi(A^\circ) = (\varphi(A))^\circ
\end{aligned}
$$

olur. Tersine olarak, her $A \subset X$ alt-kümesi için $\varphi(A^\circ) = (\varphi(A))^\circ$ ise

$$\begin{aligned} A \subset X &\Rightarrow \varphi(A^\circ) = (\varphi(A))^\circ \\ T \in \mathscr{T} &\Rightarrow \varphi(T^\circ) = \varphi(T) = (\varphi(T))^\circ \\ &\Rightarrow \varphi(T) \in \mathscr{T}_\beta \end{aligned}$$

olacaktır.

(b) Kapalı kümeler için de benzer akıl yürütmeyi uygulayabiliriz. $\varphi : X \to X/\beta$ bölüm dönüşümü kapalı bir dönüşüm ise her $A \subset X$ alt-kümesi için

$$\begin{aligned} A \in \mathscr{T}' &\Rightarrow \varphi(A) = \varphi(\bar{A}) \in \mathscr{T}_\beta^{'} \\ &\Rightarrow \varphi(\bar{A}) = \overline{(\varphi(A))} \end{aligned}$$

olur. Tersine olarak, her $A \subset X$ alt-kümesi için $\varphi(\bar{A}) = \overline{(\varphi(A))}$ oluyorsa,

$$\begin{aligned} A \subset X &\Rightarrow \varphi(\bar{A}) = \overline{(\varphi(A))} \\ A \in \mathscr{T}' &\Rightarrow \varphi(A) = \varphi(\bar{A}) = \overline{(\varphi(A))} \\ &\Rightarrow \varphi(\bar{A}) \in \mathscr{T}_\beta \end{aligned}$$

olur.

3. Kapalı birim aralığı I ile gösterelim; yani $I = [0, 1]$ olsun. $K = I \times I$ kapalı birim karedir. Bunun üzerinde, düzlemin salt topolojisinin kondurduğu topoloji varolsun. K nın düşey iki kenarı üzerinde yükseklikleri eşit olan noktaları birbirine denk sayan bir denklik bağıntısı tanımlayalım. Bu bağıntıya göre K nın bölüm kümesi $B \times I$ dairesel silindiridir. Bölüm uzayı inceleyiniz. (B çevre uzunluğu I olan çemberdir.)

Çözüm 3 Bkz. Ek Problemler 1.

4. Önceki soruda K nın yalnız düşey kenarları üzerinde denklik kurmuştur. Şimdi buna ek olarak yatay kenarlar üzerinde de, sol kenara olan uzaklıkları eşit olan noktaları denk sayan bir bağıntı düşünelim. Bu bağıntıya göre, K nın bölüm kümesi $B \times B$ toru (simit yüzeyi) dur. Bu tor $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ Öklid uzayının bir alt uzayıdır. İnceleyiniz.

Çözüm 4 Bkz. Ek Problemler 5 (Simit Yüzeyi [Torus]).

5. Birim karenin düşey kenarları üzerinde birisi aşağıdan yukarıya doğru, ötekisi yukarıdan aşağıya doğru ölçülmek üzere, eşit uzaklıktaki noktaları denk sayan bir bağıntı düşünelim. Bu bağntıya göre K nın bölüm kümesi Möbiüs şerididir. İnceleyiniz.

Çözüm 5 Bkz. Ek Problemler 4 (Möbius şeridi).

6. β bağıntısı X kümesi üzerinde bir ***denklik bağıntısı*** olsun. Eğer $A \subset X$ altkümesi β bağıntısına göre doymuş bir küme ise $\varphi^{-1} \circ \varphi(A) = A$ eşitliğinin sağlandığını; yani

$$A \quad \text{doymuş küme} \Rightarrow \varphi^{-1} \circ \varphi(A) = A \tag{10.1}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm 6 Her A için $\varphi^{-1} \circ \varphi(A) \supset A$ dır. A doymuş ise, bu kapsamanın tersinin varlığını aşağıdaki bağıntıdan görebiliriz:

$$\begin{aligned} y \in \varphi^{-1} \circ \varphi(A) &\Rightarrow \varphi(y) \in \varphi(A) \\ &\Rightarrow (\exists x \in A)(\varphi(x) = \varphi(y)) \\ &\Rightarrow x\beta y \\ &\Rightarrow y \in A \end{aligned}$$

7. Önerme 10.1.5 'in ispatında varlığı söylenen eşitliği sağlayınız.

Çözüm 7 $(X, \mathscr{T})$ uzayı üzerinde β bağıntısı bir denklik bağıntısı olsun. Bölüm uzayını $(X/\beta, \mathfrak{U})$ ile gösterelim. 10.1 uyarınca, T doymuş ise $\varphi^{-1} \circ \varphi(T) = T$ dir. Ayrıca T açık ise, bölüm topolojisinin tanımı uyarınca, $\varphi(T) \in \mathfrak{U}$ olur. Tersine olarak, T doymuş ise, gene 10.1 özeliğini kullanarak,

$$\varphi(T) \in \mathfrak{U} \Rightarrow \varphi^{-1} \circ \varphi(T) = T \in \mathscr{T} \tag{10.2}$$

yazabiliriz. Buradan,

$$\mathfrak{U} = \{\varphi(T) : (T \in \mathscr{T}) \wedge (T \text{ doymuş})\} \tag{10.3}$$

Tabii, bunun eşleğini (dualini) alırsak, X/β bölüm uzayın kapalı kümelerinin, $(X, \mathscr{T})$ uzayının kapalı doymuş kümelerinin bölüm dönüşümü altındaki resimlerine eşit olduğu ortaya çıkar:

$$\mathfrak{U}' = \{\varphi(K) : (K \in \mathscr{T}') \wedge (K \text{ doymuş})\} \tag{10.4}$$

8. $\varphi : X \longrightarrow Y$ bir bölüm dönüşümü ise, φ nin bir doymuş açık ya da kapalı alt kümeye kısıtlanmışı da bir bölüm dönüşümüdür. Gösteriniz.

Çözüm 8

(a) Açık küme durumu: $(X, \mathscr{T})$ uzayı üzerinde β bağıntısı bir denklik bağıntısı, $A \subset X$ doymuş bir küme olsun. β nın A ya kısıtı β_A bir denklik bağıntısıdır. O halde, $\varphi_A : A \to A/\beta_A$ dönüşümü bir bölüm dönüşümüdür. Eğer A açık ise, Önerme 8.3.2(a) uyarınca, $T \in \mathscr{T}_A \Leftrightarrow$

$T \in \mathscr{T}$ olacaktır. 10.3 gereğince, $\mathfrak{U}$ bölüm topolojisinin açık kümeleri $\mathscr{T}$ nun doymuş açık kümelerinin φ altındaki dönüşümleridir. $T \in \mathscr{T}$ doymuş bir açık küme olsun. $T \cap A \neq \emptyset$ ise, A doymuş açık bir küme olduğundan $T \subset A$ olur. Bütün bunları ve önceki problemi kullanarak $\varphi^{-1} \circ \varphi_A(T) = \varphi^{-1} \circ \varphi(T) = T \in \mathscr{T}_A$ yazabiliriz. O halde $\varphi_A : A \to A/\beta_A$ dönüşümü süreklidir.

(b) Kapalı küme durumu: $(X, \mathscr{T})$ uzayı üzerinde β bağıntısı bir denklik bağıntısı, $A \subset X$ doymuş bir küme olsun. β nın A ya kısıtı β_A bir denklik bağıntısıdır. O halde, $\varphi_A : A \to A/\beta_A$ dönüşümü bir bölüm dönüşümüdür. Eğer A kapalı ise, Önerme 8.3.2(b) uyarınca, $K \in \mathscr{T}_A^{'} \Leftrightarrow K \in \mathscr{T}'$ olacaktır. 10.4 gereğince, $\mathfrak{U}$ bölüm topolojisinin kapalı kümeleri $\mathscr{T}'$ nün doymuş kapalı kümelerinin φ altındaki dönüşümleridir. $K \in \mathscr{T}'$ doymuş bir kapalı küme olsun. $T \cap A \neq \emptyset$ ise, A doymuş açık bir küme olduğundan $K \subset A$ olur. Bütün bunları ve önceki problemi kullanarak $\varphi^{-1} \circ \varphi_A(K) = \varphi^{-1} \circ \varphi(K) = K \in \mathscr{T}_A^{'}$ yazabiliriz. O halde $\varphi_A : A \to A/\beta_A$ dönüşümü süreklidir.

9. $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ sürekli ve örten bir fonksiyon ise $\mathscr{T}$ topolojisinin bir tabanını $\mathscr{S}$ topolojisinin bir tabanına resmeder mi? Simgelerle söylersek, $\mathscr{B}$ ailesi $\mathscr{T}$ topolojisinin bir tabanı olduğunda $f(\mathscr{B})$ ailesi $\mathscr{S}$ topolojisinin bir tabanı olur mu? Neden?

Çözüm 9

$$\begin{aligned} S \in \mathscr{S} &\Rightarrow f^{-1}(S) \in \mathscr{T} \\ &\Rightarrow (\exists B_\imath \in \mathscr{B}, \imath \in I)\big(f^{-1}(S) = \bigcup_{\imath \in I} B_\imath\big) \\ &\Rightarrow S = fof^{-1}(S) = f\big(\bigcup_{\imath \in I} B_\imath\big) \\ &\Rightarrow S = \big(\bigcup_{\imath \in I} f(B_\imath)\big) \end{aligned}$$

olduğundan, sorunun yanıtı *evet* olmalıdır.

10. $I : (X, \mathscr{T}) \to (X, \mathscr{T})$ özdeşlik (birim) fonksiyonu her $x \in X$ için $I(x) = x$ olan fonsiyondur. I özdeşlik dönüşümünün bir topolojik eşyapı dönüşümü (homeomorphism) olduğunu gösteriniz.

Çözüm 10 Önerme 2.1.1 'in hipotezlerinin sağlandığını kolayca görebiliriz. Gerçekten

(a) $I : X \to X$ birim dönüşümü bbö bir dönüşümdür.

(b) Her $T \in \mathscr{T}$ için $T = I(T) \in \mathscr{T}$ dir.

(c) Her $S \in \mathscr{T}$ için $S = I^{-1}(S) \in \mathscr{T}$ dir.

11. $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ fonksiyonu bire-bir-içine (injective) olsun. Eğer f ve f^{-1} fonksiyonlarının her ikisi de sürekli iseler, f fonksiyonuna bir *gömme dönüşümüdür*, denilir. Bu durumda, her $x \in X$ için $g : x \to f^{-1}of(x)$ diye tanımlanan g fonksiyonu bir topolojik eşyapı dönüşümüdür (homeomorphism). Gösteriniz.

Çözüm 11 Önerme 2.1.1 'in hipotezlerinin $g = f^{-1}of$ bileşke fonksiyonu tarafından sağlandığını göstermeliyiz. Gerçekten

(a) f ve f^{-1} bbö olduğundan $g = f^{-1}of$ bileşke fonksiyonu da bbö bir dönüşümdür.

(b) f^{-1} sürekli olduğundan Her $T \in \mathscr{T}$ için $f(T) = (f^{-1})^{-1}(T) \in \mathscr{S}$ dir. f sürekli olduğundan $f^{-1}of(T) = g(T) \in \mathscr{T}$ olacaktır.

(c) f sürekli olduğundan Her $S \in \mathscr{T}$ için $f^{-1}(S) \in \mathscr{S}$ dir. f^{-1} sürekli olduğundan $fof^{-1}(S) = g^{-1}(S) \in \mathscr{T}$ olacaktır.

12. Bir $\mathfrak{s}$ ailesini alt-taban olarak kabul eden topolojinin, $\mathfrak{s}$ ailesini kapsayan bütün topolojilerin arakesitine eşit olduğunu gösteriniz (bkz. `Önerme 7.2.2`).

Çözüm 12 `Önerme 7.2.2` isteneni göstermiştir.

13. *Topolojik Toplam Uzay:* $(X_\imath, \mathscr{T}_\imath)$ uzayları verilsin. $\imath \neq \jmath \Rightarrow X_\imath \cap X_\jmath = \emptyset$ olsun. Bu koşulu sağlayan uzaylar ailesine ayrışık (dijoint) uzaylar denir.

$$\mathcal{S} = \cup \mathscr{T}_\imath = \cup \{T \, : \, (\exists \imath \in I) \, T \in \mathscr{T}_\imath\}$$

bileşimi üzerinde $\mathscr{T}$ ailesini şöyle tanımlayalım:

$$U \in \mathscr{T} \Leftrightarrow U \cap X_\imath \in \mathscr{T}_\imath, \; (\imath \in I)$$

$(\mathcal{S}, \mathscr{T})$ bir topolojik uzaydır. Gösteriniz. *(Bu uzaya $(X_\imath, \mathscr{T}_\imath)$ uzaylarının topolojik toplam uzayı* denilir.)

Çözüm 13

$$\begin{aligned} A, B \in \mathscr{T} &\Rightarrow (A \cap X_\imath \in \mathscr{T}_\imath) \wedge (B \cap X_\imath \in \mathscr{T}_\imath) \\ &\Rightarrow [(A \cap B) \cap X_\imath] \in \mathscr{T}_\imath \\ &\Rightarrow (A \cap B) \in \mathscr{T} \end{aligned}$$

bağıntısı $\mathscr{T}$ ailesinin [T2] aksiyomunun sağlandığını gösterir.

$$\begin{aligned} A_\jmath \in \mathscr{T}, \, (\jmath \in J) &\Rightarrow (\forall \jmath \in J)(A_\jmath \cap X_\imath \in \mathscr{T}_\imath), \, (\imath \in I) \\ &\Rightarrow \Big[\bigcup_{\jmath \in J} (A_\jmath \cap X_\imath \Big] \in \mathscr{T}_\imath) = \Big(\bigcup_{\jmath \in J} A_\jmath \Big) \cap X_\imath \in \mathscr{T}_\imath) \\ &\Rightarrow \bigcup_{\jmath \in J} A_\jmath \in \mathscr{T} \end{aligned}$$

bağıntısı $\mathscr{T}$ ailesinin [T3] aksiyomunun sağlandığını gösterir. [T1] aksiyomunun bu ikisinden çıktığını biliyoruz. O halde $\mathscr{T}$ ailesi $\mathcal{S}$ üzerinde bir topolojidir.

14. Bir X kümesi üzerideki $\mathscr{T}_1$ ve $\mathscr{T}_2$ topolojileri arasında $\mathscr{T}_1 \leq \mathscr{T}_2$ bağıntısı var ise $\mathscr{T}_1' \leq \mathscr{T}_2'$ bağıntısının da olduğunu gösteriniz.

Çözüm 14 $\mathscr{T}_1 \leq \mathscr{T}_2$ olduğunu varsayarsak,

$$\begin{aligned} K \in \mathscr{T}_1^{'} &\Rightarrow K' \in \mathscr{T}_1 \\ &\Rightarrow K' \in \mathscr{T}_2 \\ &\Rightarrow K \in \mathscr{T}_2^{'} \\ &\Rightarrow \mathscr{T}_1^{'} \subset \mathscr{T}_2^{'} \\ &\Rightarrow \mathscr{T}_1^{'} \leq \mathscr{T}_2^{'} \end{aligned}$$

olur.

10.3 EK PROBLEMLER

1. SILINDIRLER

   Bir kare ya da dikdörtgen kağıt alınız. Bunun karşılıklı iki kenarını çakıştırınız. Elde edeceğiniz şekil (sonlu) bir silindirdir. Şimdi bunu topoloji diliyle ifade edelim. $I^2 = [0,1]\times[0,1]$ birim karesinin karşılıklı iki kenarı çakıştırılıyor. Bu durumda, birim karede aşağıdaki denklik bağıntısı kurulmuş olur. Bu soruda $0 \leq x, y \leq 1$ olduğunu varsayıyoruz.

   $$(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow [(x,y) = (x',y')] \vee [(0,y) \leftrightarrow (1,y)] \tag{10.5}$$

   $Y = I^2/\sim$ diyelim. $\varphi : I^2 \to Y$ bölüm dönüşümü her (x,y) noktasını $[(x,y)]$ denklik sınıfına resmediyor: $\varphi((x,y)) = [(x,y)]$. I^2 üzerinde salt topolojinin kondurduğu topoloji var olsun. Y bölüm kümesi üzerinde φ bölüm dönüşümünü sürekli kılan en ince topolojiye, bölüm dönüşümü diyoruz. Böylece sonlu silindir üzerinde bir topoloji tanımlamış oluyoruz.

2. Şimdi sonsuz silindiri elde edeceğiz. Düzlem üzerinde $A = [0,1] \times \mathbb{R}$ kapalı şeridini düşünelim. Bu $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde düşey doğrultuda aşağıya ve yukarıya sınırsız uzayan şerittir. Bu şeridin soldaki ve sağdaki düşey kenarlarını birbiri üzerine lelecek şekilde yapıştıralım. İki ucu sonsuza giden bir silindir elde ederiz. Şimdi bunu bir bölüm topolojisi olarak elde edelim. $A = [0,1] \times \mathbb{R}$ şeridi üzerinde düzlemin kondurduğu topoloji var olsun. A üzerinde

   $$(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow [(x,y) = (x',y')] \vee [(0,y) \leftrightarrow (1,y)] \tag{10.6}$$

denklik bağıntısını tanımlayalım. Tabii, burada $0 \leq x \leq 1$ ve $-infty \leq y \leq +\infty$ olduğu açıktır. Bu bağıntı, şeridin düşey iki kenarını üst üste çakıştırmaya denk olur. $Y = A/\sim$ diyelim. $\varphi : A \to Y$ bölüm dönüşümü her (x, y) noktasını $[(x, y)]$ denklik sınıfına resmediyor: $\varphi((x, y)) = [(x, y)]$. Y bölüm kümesi üzerinde φ bölüm dönüşümünü sürekli kılan en ince topolojiye, bölüm dönüşümü diyoruz.

3. Şimdi yukarıda elde ettiğimiz silindiri yatay eksen byunca kaymaksızın yuvarlayalım. Tabii ilk silindirde $(0, y)$ noktası ile $(1, y)$ noktası çakışmıştır. Silindir yuvarlanarak yatay eksende 2 noktasına eriştiğinde her $y \in \mathbb{R}$ için $(0, y) \sim (1, y) \sim (2, y)$ olacaktır. Bu şekilde silindiri pozitif ve negatif yönlerde yuvarlamaya devam edersek, bütün düzlemi bir silindire dönüştürmüş oluruz. *[Tabii, düzlemin kalınlığı olmadığı için, sonsuz kez yuvarlanan silindirin yanal yüzeyinin de kalınlığı olmayacaktır.]* Şimdi bunu bir bölüm topolojisi olarak elde edelim. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ analitik düzlemi üzerinde salt topoloji var olsun. $\mathbb{R}^2$ üzerinde

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow [(x, y) = (x', y')] \vee [(x - x' = n) \wedge (y = y')] \quad (10.7)$$

denklik bağıntısını tanımlayalım. Tabii, burada $-\infty < x, y < +\infty$ dir. Bu bağıntı, bütün şeritlerin düşey kenarlarını üst üste çakıştırmaya denk olur. $Y = \mathbb{R}^2/\sim$ diyelim. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to Y$ bölüm dönüşümü her (x, y) noktasını $[(x, y)]$ denklik sınıfına resmediyor: $\varphi((x, y)) = [(x, y)]$. Y bölüm kümesi üzerinde φ bölüm dönüşümünü sürekli kılan en ince topolojiye, bölüm dönüşümü diyoruz. Burada, her $n \in \mathbb{Z}$ tamsayısı ve her $y \in \mathbb{R}$ gerçel sayısı için

$$(\ldots \sim (-n, y) \sim \ldots (0, y) \sim \ldots \sim (n, y) \sim$$

denklikleri vardır; yani bölüm uzayında bu noktalar çakışırlar.

4. Mobius Şeridi

$I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ birim karesinin karşılıklı iki kenarını ters yönde çakıştıralım. Elde edilen şekil bir Mobius şerididir. Bu şeridin bir tek yüzeyi vardır. Herhangi bir yerden başlayarak, kalemi kaldırmadan bütün yüzey üzerinde bir çizgi çizebilirsiniz. Şimdi bu yüzey üzerine bir topoloji kuralım. I^2 üzerinde düzlemin salt topolojisinin kondurduğu topoloji var olsun. I^2 birim karesi üzerinde şu denklik bağıntısını tanımlayalım:

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow [(x, y) = (x', y')] \vee [(x = 0) \wedge y' = 1 - y)] \quad (10.8)$$

Bu bağıntı, I^2 birim karesinin düşey kenarlarını ters yönde üst üste çakıştırmaya denk olur. $Y = \mathbb{I}^2/\sim$ diyelim. $\varphi : \mathbb{I}^2 \to Y$ bölüm dönüşümü her (x, y) noktasını $[(x, y)]$ denklik sınıfına resmediyor: $\varphi((x, y)) = [(x, y)]$. Y bölüm kümesi (Mobius yüzeyi) üzerinde φ bölüm dönüşümünü sürekli kılan en ince topolojiye, bölüm dönüşümü diyoruz.

5. Simit Yüzeyi (Torus)

$I^2 = [0,1] \times [0,1]$ birim karesinin dört kenarının karşılıklı olanlarını ikişer ikişer çakıştıralım. Elde edeceğimiz şekil bir simit yüzeyidir. I^2 birim karesi üzerinde düzlemin salt topolojisinin kondurduğu topoloji var olsun. Simit yüzeyini karenin bir bölüm uzayı olarak elde edebiliriz. Bunun için I^2 birim karesi üzerinde şu denklik bağıntısını kuralım:

$$(x,y) \ \sim (x',y') \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) = (x',y') \vee \\ (0,y) \leftrightarrow (1,y) \wedge (x,0) = (x,1) \end{cases} \tag{10.9}$$

Bu bağıntı, birim karenin yatay ve düşey kenarlarının karşılıklı olarak çakıştırılmasına denktir. $Y = \mathbb{I}^2/\sim$ diyelim. $\varphi : \mathbb{I}^2 \to Y$ bölüm dönüşümü her (x,y) noktasını $[(x,y)]$ denklik sınıfına resmediyor: $\varphi((x,y)) = [(x,y)]$. Y bölüm kümesi üzerinde φ bölüm dönüşümünü sürekli kılan en ince topolojiye, bölüm dönüşümü diyoruz. Bu işlem simit yüzeyi üzerinde bir topoloji kurmaktadır.

6. Küre Yüzeyi

$I^2 = [0,1] \times [0,1]$ birim karesinin dört kenarını bir noktada çakıştıralım. Örneğin dört kenarın üzerindeki bütün noktaları $(0,0)$ noktasına eşleyelim. Bu durumda bir küre yüzeyi elde ederiz. I^2 birim karesi üzerinde düzlemin salt topolojisinin kondurduğu topoloji var olsun. Küre yüzeyini karenin bir bölüm uzayı olarak elde edebiliriz. Bunun için I^2 birim karesi üzerinde şu denklik bağıntısını kuralım:

$$(x,y) \ \sim (x',y') \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) = (x',y') \vee \\ (0,y) \leftrightarrow (0,0) \vee \\ (x,0) \leftrightarrow (0,0) \vee \\ (1,y) \leftrightarrow (0,0) \vee \\ (x,1) \leftrightarrow (0,0) \end{cases} \tag{10.10}$$

Bu bağıntı, birim karenin yatay ve düşey kenarları üzerindeki bütün noktaları $(0,0)$ noktasına eşler. $Y = \mathbb{I}^2/\sim$ diyelim. $\varphi : \mathbb{I}^2 \to Y$ bölüm dönüşümü her (x,y) noktasını $[(x,y)]$ denklik sınıfına resmediyor: $\varphi((x,y)) = [(x,y)]$. Y bölüm kümesi (küre yüzeyi) üzerinde φ bölüm dönüşümünü sürekli kılan en ince topolojiye, bölüm dönüşümü diyoruz. Bu işlem küre yüzeyi üzerinde bir topoloji kurmaktadır.

7. Çember

Kapalı bir aralıktan bir çember elde etmek için bu aralığın iki ucunu birleştirerek bir çembere benzetebiliriz. Bu görüşten hareketle, çemberi kapalı bir aralığın bölüm uzayı olarak oluşturabiliriz. $Y = \{(x,y) | x^2 + y^2 = 1\}$ diyelim. $[0, 2\pi]$ aralığı üzerinde salt topoloji var olsun. $f : [0, 2\pi] \to Y$ fonksiyonunu $f(t) = (cost, sint) \in \mathbb{R}^2$ diye tanımlayalım. Bu fonksiyon sürekli ve kapalıdır. $A = [0, 2\pi]$ aralığı üzerinde uç noktaları eşleyen aşağıdaki bağıntı bir denklik bağıntısıdır:

$$x \sim x' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \vee \\ x = 0 \wedge y = 2\pi \wedge \end{cases} \tag{10.11}$$

Buna göre f fonksiyonunu sürekli kılan en ince topoloji Y birim çemberi üzerindeki bölüm topolojisidir.