Bölüm 14

AYIRMA AKSİYOMLARI

Bir X kümesi üzerinde ayrık olmayan topolojik yapıdan başlayarak ayrık topolojik yapıya kadar çok değişik topolojik yapıların kurulabileceğini biliyoruz. Topojik yapı inceldikçe, bir yandan, uzay üzerindeki sürekli fonksiyonlar çoğalır ve farklı kümeleri farklı komşuluklarla ayırma olanağı doğar. Bu ise, yakınsak dizi ve süzgeçlerin tek limite gitmelerini sağlar; ancak, öte yandan, topolojik yapının incelmesi, yakınsak dizilerin ve yakınsak süzgeçlerin sayısını azaltır ve uzayın birinci ya da İkinci Sayılabilme Aksiyomlarını sağlamasını zorlaştırır. Bu nedenle, matematikçi, küme üzerinde yapmak istediği işe uygun olan bir topolojik yapı kurar. Değişik yapıları, bazı ortak niteliklere sahip olan sınıflara ayırıp her sınıfın özeliklerini ayrı ayrı incelemek daha kolay ve daha yararlı olmaktadır. Bu bölümde, *Alexandroff* ve *Hopf* tarafından ortaya konan aksiyomlarla (ki bunlara *ayırma aksiyomları* diyeceğiz) yapılan sınıflamayı inceliyeceğiz. Almanca'da "'Ayırma Aksiyomu" anlamına gelen "'Trennungsaxiom"' kelimesinin baş harfi kullanılarak, T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, ile gösterilen beş ayrı sınıfı, sırasıyla, tanımlayacağız.

14.1 T_o -UZAYLARI

Tanım 14.1.1. Bir $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayı verilsin. X kümesinin farklı iki noktası verildiğinde, bu noktalardan en az birisinin, diğerini içermeyen bir komşuluğu varsa, $(X, \mathscr{T})$ uzayına bir T_0 *-uzayıdır* denilir.

Örnek 14.1.1. X kümesi birden çok öğeye sahipse, bu küme üzerindeki ayrık olmayan topolojiye göre uzay bir T_0 -uzayı değildir.

Önerme 14.1.1. *T_0 uzayının her alt uzayı da bir T_0-uzayıdır. Ancak T_0 uzayının bir bölüm uzayının yine T_0 uzayı olması gerekmez.*

İ S P A T: Kolayca görülür.

14.2 T_1 -UZAYLARI

Tanım 14.2.1. Bir $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayının herhangi farklı iki noktası verildiğinde, bu noktaların herbirisinin, diğerini içermeyen bir komşuluğu varsa, bu uzaya bir T_1 *-uzayıdır*, denilir.

Bunu aşağıdaki gibi simgelerle ifade edebiliriz:

$$[T_1] \quad a, b \in X, \quad a \neq b \Rightarrow \begin{cases} \exists H \in \mathscr{B}(a), & b \notin H \\ \exists G \in \mathscr{B}(b), & a \notin G \end{cases}$$

Teorem 14.2.1. *Bir uzayın T_1-uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul her noktasının kapalı bir küme olmasıdır.*

İ S P A T:
Gerekliği: Herhangi bir $p \in X$ alalım. $\{p\}'$ nün açık olduğunu göstereceğiz. $x \in \{p\}'$ ise $x \neq p$ olacağından $[T_1]$ gereğince $p \notin G$ olacak şekilde bir $G \in \mathscr{B}(x)$ vardır. Her $x \in \{p\}'$ için aynı şey yapılabileceğinden $\{p\}'$ açıktır. O halde $\{p\}$ kapalıdır.
Yeterliği: $a, b \in X$ ve $a \neq b$ ise $b \notin \{a\}$ dir. Varsayımımız gereğince $\{a\}$ kapalı olduğundan $\{a\}' \in \mathscr{B}(b)$ ve $a \notin \{a\}'$ dür. Benzer düşünüşle $\{b\}' \in \mathscr{B}(a)$ ve $b \notin \{b\}'$ olacağından $[T_1]$ beliti sağlanır.

Sonuç 14.2.1. *Bir $(X, \mathscr{T})$ uzayının T_1-uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathscr{T}$ nun sonlu tümleyenler topolojisinden daha ince dokulu olmasıdır.*

İ S P A T:
Gerekliği: Uzay T_1-uzayı ise, önceki teorem gereğince, her sonlu küme kapalıdır; yani her sonlu kümenin tümleyeni açıktır. Bu ise, sonlu tümleyenler topolojisinin $\mathscr{T}$ dan daha kaba olması demektir.
Yeterliği: $\mathscr{T}$ topolojisi sonlu tümleyenler topolojisinden daha ince ise her noktanın tümleyeni açık olacağından, tek noktadan oluşan her küme kapalıdır. O halde, gene önceki teorem gereğince, $(X, \mathscr{T})$ bir T_1-uzayıdır.

14.3 T_2 -UZAYLARI

HAUSDORFF UZAYLARI

Tanım 14.3.1. Bir $(X, \mathscr{T})$ uzayının herhangi farklı iki noktası verildiğinde bu noktaların birbirlerinden ayrık birer komşuluğu varsa, $(X, \mathscr{T})$ uzayına bir T_2 -uzayıdır ya da bir *Hausdorff uzayıdır*, denilir.

Bunu aşağıdaki gibi simgelerle ifade edebiliriz:

$$[T_2] \quad a, b \in X, a \neq b \Rightarrow (\exists A \in \mathscr{B}(a)\ (\exists B \in \mathscr{B}\ (b))\ A \cap B = \emptyset$$

Her Hausdorff uzayının bir T_1-uzayı olduğu apaçıktır. $[T_2]$ aksiyomu Hausdorff aksiyomu diye adlandırılır ve bu nedenle çoğu kez $[H]$ ile gösterilir.

Teorem 14.3.1. *Bir $(X, \mathscr{T})$ uzayı için aşağıdaki özelikler eşdeğerdir:*

(i) Uzay bir Hausdorff uzayıdır.

(ii) Herhangi bir noktanın bütün kapalı komşuluklarının arakesiti yalnız bu noktadan ibarettir.

(iii) X üzerindeki yakınsak bir süzgecin tek kaplama noktası, süzgecin yakınsadığı noktadır.

(iv) X üzerindeki bir süzgecin birden çok limit noktası yoktur.

İ S P A T:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sabit bir $p \in X$ noktası seçelim. $p \neq x \in X$ ise $[T_2]$ aksiyomu gereğince, $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde p noktasının bir U komşuluğu ile x noktasının bir V komşuluğu vardır. Özel olarak bu komşulukları açık kümeler olarak seçebiliriz. Bu durumda V', p nin kapalı bir komşuluğudur ve bu komşuluk x noktasını içermez; yani x noktası p nin kapalı komşuluklarının arakesit kümesine ait olamaz. Her $x \neq p$ noktası için aynı şey söylenebileceğine göre, söz konusu arakesit p den farklı hiçbir noktayı içeremez.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): X üzerinde $\mathscr{S} \to p$ olacak şekilde bir $\mathscr{S}$ süzgeci alalım. $\mathscr{S}$ nin biricik kaplama noktasının p den ibaret olduğunu göstereceğiz. $x \neq p$ ise, (ii) gereğince $x \notin K$ olacak şekilde p nin kapalı bir K komşuluğu vardır. Ayrıca $\mathscr{S} \to p$ olduğundan, $S \subset K$ olacak şekilde bir $S \in \mathscr{S}$ vardır. O halde $S \cap K' = \emptyset$ olur. Oysa K', x noktasının bir komşuluğudur, öyleyse x noktası

$\mathscr{S}$ nin bir kaplama noktası olamaz.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Bir süzgecin her limit noktası aynı zamanda bir kaplama noktası olduğundan, istenen şey apaçıktır.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Olmayana ergi yöntemiyle yapacağız. $x \neq y$ olsun ve x noktasının her V komşuluğunun y nin her W komşuluğu ile kesiştiğini varsayalım. Bu durumda $V \cap W$ şeklindeki kümelerin ailesi, X üzerinde hem x, hem y noktasına yakınsayan bir süzgeç tabanı olacaktır. Oysa, böyle olması (iv) ile çelişir.

Sonuç 14.3.1. *Bir X kümesinden bir Y Hausdorff uzayına bir f fonksiyonu verilsin. X üzerindeki bir $\mathscr{S}$ süzgecine göre f nin ençok bir limit noktası varolabilir. Eğer böyle bir limit varsa, bu nokta f nin $\mathscr{S}$ ye göre biricik kaplama noktasıdır.*

İ S P A T: Süzgecin yakınsaması tanımı ile önceki teoremden hemen çıkar.

Önerme 14.3.1. *Bir $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ sürekli fonksiyonu veriliyor. Eğer $(Y, \mathscr{S})$ bir Hausdorff uzayı ve her $x \neq y$ için $f(x) \neq f(y)$ oluyorsa $(X, \mathscr{T})$ uzayı da Hausdorff uzayıdır.*

İ S P A T: $f(x)$ ve $f(y)$ nin, sırasıyla, V ve W gibi birbirinden ayrık iki komşuluğunu alalım. $f^{-1}(V)$ ve $f^{-1}(W)$ kümeleri, sırasıyla x ve y nin ayrık birer komşuluğu olacaktır.

Sonuç 14.3.2. *Bir Hausdorff topolojisinden daha ince olan her topoloji gene bir Hausdorff topolojisidir.*

İ S P A T: $(H, \mathscr{H})$ bir Hausdorff uzayı ve $\mathscr{H} \subset \mathscr{T}$ ise $I : (X, \mathscr{T}) \to (X, \mathscr{H})$ özdeşlik dönüşümü süreklidir. Önceki önerme uygulanırsa $\mathscr{T}$ nun bir Hausdorff topolojisi olduğu görülür.

Sonuç 14.3.3. *Bir Hausdorff uzayının her alt-uzayı da bir Hausdorff uzaydır.*

İ S P A T: $(X, \mathscr{H})$ bir Hausdorff uzayı olsun ve bir $A \subset X$ alt-kümesi verilsin. $(A, \mathscr{H}_A)$ dan $(X, \mathscr{H})$ içine olan doğal gömmeye önceki önerme uygulanabilir.

Önerme 14.3.2. *Boş olmayan uzayların boş olmayan bir ailesinin çarpım uzayının bir Hausdorff uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul çarpan uzayların her bisinin bir Hausdorff uzayı olmasıdır.*

Gerekliği: Bir $\{(X_\imath, \mathscr{T}_\imath) : \imath \in I\}$ ailesinin $(X, \mathscr{P})$ çarpım uzayı Hausdorff ise her $j \in I$ için $(X_j, \mathscr{T}_j)$ uzayının $(X, \mathscr{P})$ nin bir alt-uzayına eşyapılı olduğunu göstermek yetecektir.

$$\Pi_{\imath \in I} X_\imath = X \ni x = (x_\imath),$$

noktasının bütün $\imath(\imath \neq j)$-ıncı koordinatlarını $X_\imath$ lar içinde herhangi birer sabit olarak seçelim; öyle ki yalnız j-inci koordinatı X_j içinde değişken bir nokta olsun. X çarpım kümesinin böyle bir noktasını x^j ile gösterelim. Bu noktanın x_j koordinatının X_j yi taramasıyla elde edilen kümeyi ϑ_j ile gösterelim. ϑ_j nin X çarpım kümesinin bir altkümesi olduğu açıktır; dolayısıyla, $\mathscr{P}$ çarpım topolojisinin bu küme üzerine kondurduğu topolojiyi $\mathscr{O}_j$ ile gösterirsek $(\vartheta_j, \mathscr{O}_j)$ uzayı, önceki sonuç uyarınca, Hausdorfftur. Bunun $(\vartheta_j, \mathscr{T}_j)$ uzayı ile eşyapılı olduğu açıktır.

Yeterliği: Eğer x, y noktaları X çarpım kümesinin farklı iki noktası ise enaz bir $j \in I$ için $\pi_j(x) = x_j$ izdüşümü $\pi_j(y) = y_j$ izdüşümünden farklıdır. $(X_j, \mathscr{T}_j)$ bir Hausdorf uzayı olduğuna göre, x_j ve y_j nin, sırasıyla, V ve W gibi ayrık birer komşulukları vardır. O halde $\pi_j^{-1}(V)$ ile $\pi_j^{-1}(W)$ kümeleri X içinde x ve y nin ayrık iki komşuluğu olacaktır.

14.4 DÜZENLİ UZAYLAR

Tanım 14.4.1. Eğer $(X, \mathscr{T})$ uzayı aşağıdaki aksiyomu sağlıyorsa, *bu uzaya düzenli (regular) bir uzay* ve topolojisine de *düzenli bir topoloji*, denilir:

[D] Kapalı bir K alt-kümesi ile bir $x \notin K$ noktası verildiğinde, K kümesi ile x noktasının birbirlerinden ayrık birer komşuluğu vardır.

Önerme 14.4.1. *Bir $(X, \mathscr{T})$ uzayının aşağıdaki özelikleri eşdeğerdir:*

[D1] Uzay düzenlidir.

[D2] Her noktanın kapalı komşuluklar ailesi bu noktanın bir yerel tabanıdır.

[D3] Herhangi bir x noktasının her V komşuluğu, $\bar{W} \subset V$ olacak şekilde açık bir W komşuluğu kapsar.

İ S P A T:

$[D1] \Rightarrow [D2]$: Tanım 5.3.1 gereğince, bir x noktasının her hangi bir W komşuluğunun kapalı bir komşuluk kapsadığını göstereceğiz. Özel olarak W yu açık alırsak, W' kapalı olur ve x noktasını içermez. O halde $[D1]$ gereğince W' nün öyle bir U komşuluğu ile x noktasının öyle bir V komşuluğu vardır ki $U \cap V = \emptyset$ dir. U ile V yi açık alabiliriz. $V \subset U'$ olduğundan $\bar{V} \subset (\overline{U'}) = (U^\circ)' = U'$ olacaktır. Oysa $U \supset W'$ idi. O halde $U' \subset W$ dur ve buradan $\bar{V} \subset W$ çıkar.

$[D2] \Rightarrow [D3]$: U kümesi x noktasının herhangi bir komşuluğu ise, $[D2]$ gereğince, U kümesi, kapalı bir V komşuluğu kapsayacaktır. Öte yandan, komşuluk tanımı gereğince, V açık bir W komşuluğunu kapsar. (bkz Tanım 5.1.1). O halde $W \subset V = \bar{V} \subset U$ dur ve buradan $\bar{W} \subset U$ olacağı görülür.

$[D3] \Rightarrow [D1]$: K kapalı bir alt-küme ve $x \notin K$ olsun. K', x noktasının bir komşuluğu olduğundan, $[D3]$ gereğince, $\bar{W} \subset K'$ olacak şekilde açık bir W komşuluğu vardır. $(\bar{W})'$ açıktır ve K yı kapsar; yani bu küme K nın bir komşuluğudur ve x noktasının W komşuluğu ile kesişmez.

14.5 T_3 -UZAYLARI

Tanım 14.5.1. Aşağıdaki aksiyomu sağlayan $(X, \mathscr{T})$ uzayına bir T_3-*uzayıdır* denilir:

$[T_3]$ Uzay düzenlidir ve T_1 aksiyomunu sağlar.

Uyarı 14.5.1. Bazı kaynaklarda *düzenli uzay* diye $[D]$ aksiyomunu sağlayan Hausdorff uzaylarına denilir.

Önerme 14.5.1. *Aşağıdaki özelikler vardır.*

1. Her T_3-uzayı bir Hausdorff uzayıdır.
2. Düzenli bir uzayın her alt-uzayı da düzenlidir.
3. Bir T_3-uzayının her alt-uzayı da bir T_3-uzayıdır.
4. Bir çarpım uzayın düzenli (ya da T_3) olması için gerekli ve yeterli koşul herbir çarpanın düzenli (ya da T_3) olmasıdır.
5. T_3-uzaylarının bölüm uzaylarının T_3-olması gerekmez.

14.6 BÜSBÜTÜN DÜZENLİ UZAYLAR

Tanım 14.6.1. Bir $(X, \mathscr{T})$ uzayı verilsin. Kapalı bir $A \subset X$ alt kümesi ile bir $x \notin A$ noktası verildiğinde eğer X kümesinden gerçel eksen üzerindeki salt topolojinin $[0, 1]$ alt-uzayı üzerine aşağıdaki koşulları sağlayan sürekli bir f fonksiyonu varsa, $(X, \mathscr{T})$ uzayına *büsbütün düzenli uzaydır* denilir:

$$f : X \to [0, 1],\ f(A) = 1, f(x) = 0$$

Böyle bir fonksiyona A kümesi ile x noktasını *ayırıyor* denilir.

Büsbütün düzenli olan T_1-uzaylarına *Tychonoff uzayları* diyeceğiz. Bazı kaynaklarda Tychonoff uzayları $T_{\frac{3}{2}}$ simgesi ile gösterilir.

Önerme 14.6.1. *Aşağıdaki özelikler vardır.*

(a) Büsbütün düzenli (ya da Tychonoff) bir uzayın her alt-uzayı da büsbütün düzenli (ya da Tychonoff) dir.

(b) Bir çarpım uzayın büsbütün düzenli (Tychonoff) olması için gerekli ve yeterli koşul her bir çarpanının büsbütün düzenli (Tychonoff) olmasıdır.

(c) Tychonoff uzaylarının bölüm uzaylarının da Tychonoff olması gerekmez.

14.7 NORMAL UZAYLAR

Tanım 14.7.1. Aşağıdaki aksiyomu sağlayan $(X, \mathscr{T})$ uzayına *normal uzay* denilir:

[N] X kümesinin birbirlerinden ayrık herhangi iki kapalı alt kümesinin, birbirlerinden ayrık birer komşulukları vardır.

Önerme 14.7.1. *Bir $(X, \mathscr{T})$ uzayının aşağıdaki özelikleri birbirlerine denktir:*

[N1] Uzay normaldir.

[N2] Kapalı bir A kümesinin her komşuluğu A nın kapalı bir komşuluğunu kapsar.

[N3] Kapalı bir A kümesinin her U komşuluğu $\bar{V} \subset U$ olacak şekilde A nın açık bir V komşuluğunu kapsar.

İ s p a t: Bu üç özelliğin denkliğini göstermek için x noktası yerine kapalı bir küme alarak tamamen `Önerme` 14.4.1 deki yöntemi uygulamak yetecektir.

Aşağıdaki önermeyi daha sonra yardımcı araç olarak kullanacağız.

Önerme 14.7.2. $[0,1]$ *aralığında, tabanı* 2 *nin bir tamsayı kuvvetine eşit olan kesirler kümesi salt topolojiye göre* $[0,1]$ *içinde yoğundur.*

İ s p a t:

$$D = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{3}{2^3}, \frac{5}{2^3}, \frac{7}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots, \frac{15}{2^4}, \dots \right\} \tag{14.1}$$

kümesinin, salt topolojiye göre $[0,1]$ içinde yoğun olduğunu göstereceğiz. Bunun için, $[0,1]$ içindeki her (a,b) açık aralığının D ye ait enaz bir öğe içerdiğini göstermek yetecektir. $\frac{1}{2^n} \to 0$ olduğundan

$$n \geq p \Rightarrow \frac{1}{2^n} < b - a \tag{14.2}$$

olacak biçimde doğal bir p sayısı vardır. Öte yandan

$$\left[\frac{(k-1)}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right] \quad (k = 1, 2, 3, \dots, 2^n) \tag{14.3}$$

aralıkları $[0,1]$ aralığının bir örtüsüdür. Dolayısıyla bu aralıklardan birisi a öğesini içerir, yani

$$\frac{(m-1)}{2^n} < a < \frac{m}{2^n} \tag{14.4}$$

olacak biçimde doğal bir m sayısı vardır. (14.2) ve (14.4) eşitsizliklerinden, hemen

$$a < \frac{m}{2^n} < b \tag{14.5}$$

olduğu görülür.

Üzerlerindeki sürekli gerçel fonksiyonların bolluğu normal uzayların önemini artırır. Genel topolojinin köşe taşlarından biri olan bu gerçeği aşağıdaki teoremle belirleyeceğiz.

Teorem 14.7.1. [Urysohn] *Bir Hausdorff uzayının normal olması için gerekli ve yeterli koşul, Urysohn aksiyomu diye bilinen aşağıdaki özeliğin sağlanmasıdır:*

[U] A ile B kümeleri $(X, \mathscr{T})$ uzayının birbirlerinden ayrık iki kapalı alt kümesi ise, aşağıdaki özelikleri sağlayan sürekli bir $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır:

$$0 \leq f(x) \leq 1, \quad f(A) = \{0\} \quad \text{ve} \quad f(B) = \{1\} \tag{14.6}$$

Yeterliği: $[U]$ özelliği sağlanıyorsa $[N]$ özeliğinin de sağlanacağını gösterelim. İstenen özeliklere sahip f fonksiyonuna bağlı olarak şu kümeleri tanımlayalım.

$$U = \{x \mid f(x) < 1/2\}$$
$$V = \{x \mid f(x) > 1/2\}$$

U ve V kümelerinin açık olduğunu gösterelim. $a \in U$ ise $f(a) < 1/2$ dir. f sürekli olduğundan, a nın öyle bir W komşuluğu vardır ki, yeterince büyük n doğal sayıları için

$$x \in W \Rightarrow |f(x) - f(a)| < 2^{-n}$$

olur. Buradan, n yeteri kadar büyük seçilerek

$$f(x) < f(a) + 2^{-n} < 1/2$$

çıkarılabilir. Bu ise $x \in U$ olması ve o da U nun açık olması demektir. V için de benzer işlem yapılabilir. Öte yandan $A \subset U, B \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olduğu apaçıktır.

Gerekliği: A ile B birbirlerinden ayrık ve kapalı iki alt küme olduğunda B' açık kümesi kapalı A kümesinin bir komşuluğu olacağından, $[N3]$ aksiyomu uyarınca

$$A \subset V_{1/2} \subset \bar{V}_{1/2} \subset B'$$

olacak biçimde açık bir $V_{1/2}$ kümesi var olacaktır. Aynı düşünce

$$A \subset V_{1/2}, \quad V_{1/2} \subset \bar{V}_{1/2}, \quad \bar{V}_{1/2} \subset B'$$

kapsama bağıntıları için yeniden uygulanırsa

$$A \subset V_{1/4} \subset \bar{V}_{1/4} \subset V_{1/2} \subset \bar{V}_{1/2} \subset V_{3/4} \subset \bar{V}_{3/4} \subset B'$$

olacak biçimde $V_{1/4}$ ve $V_{3/4}$ açık kümelerinin varlığı söylenebilir.

Bu büyüyen kümeler dizisindeki kapalı her kümeyi kapsayan açık bir küme için $[N3]$ aksiyomu uygulanarak, her $t \in D$ ikidelik (dyadic) kesiri için öyle bir V_t açık kümesi bulunabilir ki $r, s \in D$ ve $r < s$ olduğunda $V_r \subset V_s$ bağıntısı sağlanır. Ayrıca her $t \in D$ için $V_t \subset B'$ olduğundan $V_t \cap B = \emptyset$ olacaktır.

Şimdi X üzerinde bir f fonksiyonunu şöyle tanımlıyalım:

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{t : x \in V_t\}, & \{x \notin B\} \text{ ise} \\ 1, & \{x \in B\} \text{ ise} \end{cases}$$

$D \subset [0,1]$ ve $t \in D$ olduğunda her x için $0 \leq f(x) \leq 1$ olacağı görülür. Ayrıca, her $t \in D$ için $A \subset V_t$ olduğunda $f(A) = \{0\}$ olacaktır. Öte yandan $f(B) = \{1\}$ olduğu tanımdan bellidir. Geriye kalan şey bu fonksiyonun sürekli olduğunu göstermektir.

Biliyoruz ki $f : X \to [0,1]$ fonksiyonunun sürekli olması için her $0 < a, b < 1$ için $f^{-1}([0,a))$ ve $f^{-1}((b,1])$ ters resimlerinin açık olması yetecektir. (Neden?) Şimdi, eğer

$$\begin{aligned} f^{-1}([0,a)) &= \cup \{V_t : t < a\} \\ f^{-1}((b,1]) &= \cup \{(\bar{V_t})' : t > b\} \end{aligned}$$

eşitliklerini gösterirsek, sağ yanlar açık kümelerin birer bileşimi olduğundan, ispat bitecektir. Önce birinci eşitliği sağlayalım.

$x \in f^{-1}([0,a))$ ise $f(x) \in [0,a)$, yani $0 \leq f(x) < a$ olacaktır. Öte yandan D kümesi $[0,1]$ içinde yoğun olduğundan (bkz. Önerme 14.7.2) $f(x) < t_x < a$ olacak biçimde bir $t_x \in D$ vardır. Öyleyse

$$f(x) = \inf\{t : x \in V_t\} < t_x < a$$

olacaktır ki, bu $t_x < a$ olmak üzere $x \in V_{t_x}$ olması demektir. Dolayısıyla $x \in \cup\{V_t : t < a\}$ olur.

Tersine olarak, $y \in \cup\{V_t : t < a\}$ ise $t_y < a$ ve $y \in V_y$ olacak biçimde bir $t_y \in D$ vardır. Dolayısıyla

$$f(y) = \inf\{t : y \in V_t\} \leq t_y < a$$

olacaktır. Bu ise $y \in f^{-1}([0,a))$ olması demektir.

Şimdi ikinci eşitliği gösterelim. $x \in f^{-1}((b,1])$ ise $b < f(x) \leq 1$ olacaktır. D kümesi $[0,1]$ içinde yoğun olduğundan $b < t_1 < t_2 < f(x)$ olacak biçimde $t_1, t_2 \in D$ vardır. Başka bir deyişle

$$f(x) = \inf\{t : x \in V_t\} > t_2$$

olur. Öyleyse $x \notin V_{t_2}$ dir. Öte yandan $t_1 < t_2$ olması $V_{t_1} \subset V_{t_2}$ olmasını gerektirdiğinden $x \notin \bar{V}_{t_2}$ dir. Demek ki $t_1 > b$ olduğunda $x \in (\bar{V}_{t_1})'$ olmaktadır. O halde

$$x \in \cup\{(\bar{V}_t)' : t > b\} \text{ çıkar.}$$

Tersine olarak, $y \in \cup\{(V_t)' : t > b\}$ ise $t_y > b$ ve $y \in (\bar{V}_{t_y})'$ olacak biçimde bir $t_y \in D$ vardır; Dolayısıyla $y \notin \bar{V}_{t_y}$ dır oysa $t < t_y$ olması $V_t \subset V_{t_y} \subset \bar{V}_{t_y}$ olmasını gerektirdiğinden, her $t < t_y$ için $y \notin V_t$ çıkar

Demek ki

$$f(y) = \inf\{t : y \in V_t\} \geq t_y > b$$

dir. Buradan $y \in f^{-1}((b,1])$ çıkar.

Teorem 14.7.2. [Birimin ayrışımı] *X normal uzay, F kümesi, X uzayında kapalı bir alt küme ve $U_1, U_2, \cdots, U_n$ kümeleri F nin bir açık örtüsü ise X üzerinde değerleri $[0,1]$ içinde olan ve aşağıdaki iki koşulu sağlayan sürekli $h_1, h_2, \cdots, h_n$ fonksiyonları vardır:*

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} h_k(x) = 1$, her $x \in F$ için

(ii) $h_k(U_k') = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n$ için

İ S P A T: Kabulümüze göre

$$F \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$$

bağıntısı vardır. İspatı önce özel bir durum için yapacak, sonra bu kısıtı kaldıracağız.

Durum 1:

$$\bigcup_{k=1}^{n} U_k = X$$

olduğunu kabul edelim. Bu kabul altında

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = X \quad \text{ve} \quad A_k \subset U_k \ (k = 1, 2, \cdots, n)$$

olacak şekilde kapalı

$$A_1, A_2, \cdots, A_n$$

kümeleri vardır. İspatı tüme varımla yapacağız. $n = 1$ hali apaçıktır. $U_1 \cup U_2 = X$ olsun. U_1' ve U_2' ayrık kapalı iki kümedir ve X normal olduğundan öyle ayrık ve açık V_1, V_2 kümeleri vardır ki $U_1' \subset V_1$ ve $U_2' \subset V_2$ olur. $A_1 = V_1', A_2 = V_2'$ koyarsak $n = 2$ için istediğimiz sonuç elde edilmiş olur.

Bu savımızın $n - 1$ için doğru olduğunu kabul edelim ve $\cup_{k=1}^{n} U_k = X$ olsun

$$X = \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} U_k \right) \cup U_n$$

olduğundan öyle kapalı A ve A_n kümeleri vardır ki $A \subset \bigcup_{k=1}^{n-1} U_k, A_n \subset U_n$ ve $A \cup A_n = X$ olur. $k = 1, 2, \cdots, n-1$ için $V_k = U_k \cap A$ tanımlayalım. Buna göre

$$\bigcup_{k=1}^{n-1} V_k = A$$

olur. Şimdi A ya tüme varım hipotezimizi uygularsak,

$$\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k = A, \quad A_k \subset V_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

olacak şekilde A içinde kapalı olan $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ kümelerinin varlığını söyleyebiliriz. Ayrıca A_k kümelerinin herbirisi X içinde de kapalıdır ve $A_k \subset U_k$ kapsama bağıntısı vardır. Dolayısıyla, göstermek istediğimiz

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = X$$

bağıntısı çıkar.

Durum 2:

Şimdi teoremi $F = X$ hali için ispat edeceğiz. $\cup_{k=1}^{n} U_k = X$ eşitliğinin varlığını ve $A_1, A_2, \cdots, A_n$ kümelerinin *Durum 1* deki gibi olduklarını varsayıyoruz.

Urysohn Teoremine göre, X üzerinde

$$f_k(X) \subset [0,1],\ f_k(A_k) = 1 \text{ ve } f_k(U'k) = 0\,(k = 1, 2, \cdots, n) \tag{14.7}$$

özeliklerini sağlayan sürekli f_k fonksiyonları vardır. Şimdi $k = 1, \cdots, n$ için h_k fonksiyonlarını şöyle tanımlayalım:

$$h_k(x) = \frac{f_k(x)}{\sum_{j=1}^{n} f_j(x)}, \quad x \in X \tag{14.8}$$

Her $x \in X$ için $\sum_{j=1}^{n} f_j(x) \geq 1$ olduğundan h_k nın sürekli olduğu (i) ve (ii) yi de sağladığı apaçıktır.

Durum 3: Artık, yukarıda koyduğumuz kısıtları kaldırıp, teoremi en genel haliyle ispatlayabileceğiz. F kümesi X uzayı içinde kapalı bir alt küme olsun ve

$$F \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$$

kapsama bağıntısı sağlansın. $U_0 = F'$ kümesini tanımlayalım ve

$$\bigcup_{k=0}^{n} U_k = X$$

olacağına dikkat edelim. *Durum 2* uyarınca, X üzerinde, değerleri $[0,1]$ arasında olan öyle sürekli $h_0, h_1, \cdots, h_n$ fonksiyonları vardır ki

$$\sum_{k=0}^{n} h_k(x) = 1, \quad (x \in X) \tag{14.9}$$

ve

$$h_k(U'_k) = 0, \quad (k = 0, 1, \cdots, n) \tag{14.10}$$

olur. $(U'_0 = F)$ demiştik. (14.10) den $h_0(F) = 0$ çıkar. Bunu (14.9) de kullanırsak $x \in F$ için

$$\sum_{k=1}^{n} h_k(x) = 1$$

elde edilir. Yani $h_1, h_2, \cdots, h_n$ fonksiyonları istenen özeliklere sahiptirler.

14.8 T_4 -UZAYLARI

Tanım 14.8.1. Aşağıdaki aksiyomu sağlıyan $(X, \mathscr{T})$ uzayına bir T_4 -uzayıdır denilir.

$[T_4]$ Uzay normaldir ve $[T_1]$ aksiyomunu sağlar.

Önerme 14.8.1. *Aşağıdaki özelikler kolayca görülebilir.*

1. T_1-uzayında her nokta kapalı olduğundan, her T_4-uzayı aynı zamanda bir T_1-uzayıdır.

2. Bir T_4 uzayının bir alt-uzayının yine bir T_4 uzayı olması gerekmez; yani T_4-uzayının kalıtım özelliği yoktur.

3. $[D]$ aksiyomu, Hausdorff aksiyomunun noktalar yerine kapalı kümeler için ifade edilmiş şeklidir. Ancak bir düzenli uzayın Hausdorff olması gerekmediği gibi, bir Hausdorff uzayının da düzenli olması gerekmez.

4. Normal (ya da T_4) uzaylarının kapalı alt-uzayları da normal (ya da T_4) dür.

5. Normal uzayların çarpım uzayının da normal olması gerekmez.

14.9 G_δ ve F_σ Kümeleri

Tanım 14.9.1. Bir topolojik uzayda sayılabilir sayıda açık kümelerin arakesiti olan kümelere G_δ -kümesi denilir.

$(X, \mathscr{T})$ uzayında A alt kümesi bir G_δ kümesi ise

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} T_i, \quad T_i \in \mathscr{T} \tag{14.11}$$

olacak biçiminde $T_i : \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$ açık kümeler ailesi vardır.

Tanım 14.9.2. Bir topolojik uzayda sayılabilir sayıda kapalı kümelerin bileşimi olan kümelere F_σ -kümesi denilir.

$(X, \mathscr{T})$ uzayında B alt kümesi bir F_σ kümesi ise

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i, \quad F_i \quad \text{kapalı} \tag{14.12}$$

olacak biçiminde $F_i : \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$ kapalı kümeler ailesi vardır.

Tanım 14.9.3. Bir X kümesinden bir Y kümesine tanımlı olan bütün fonksiyonların kümesini $\mathscr{F}(X, Y)$ ile gösterelim ve bir $\mathscr{A} \subset \mathscr{F}(X, Y)$ alt kümesini düşünelim. Her $x, y \in X$ için $f(x) \neq f(y)$ olacak biçimde bir $f \in \mathscr{A}$ fonksiyonu varsa, $\mathscr{A}$ ailesi X içindeki noktaları ayırıyor denilir.

14.9.1 Problemler

1. $\mathbb{R}^2$ üzerinde aşağıdaki $\mathscr{T}$ topolojik yapısını kuralım: Bir $(x_0\ y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktasının komşuluklar ailesi, bir $|x - x_0| < \epsilon, \quad (\epsilon > 0)$, şeridini kapsayan bütün kümeler olarak tanımlansın. Komşuluk aksiyomlarının sağlandığını ve dolayısıyla $\mathbb{R}^2$ üzerinde bu yolla tanımlanan bir $\mathscr{T}$ topolojisinin var olduğunu görünüz.

   (a) $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$ uzayı $T_i (i = 1, 2, 3, 4)$ uzaylarından bir sınıfa ait midir?

   (b) Bu uzayda bir (x, y) noktasından ibaret küme kapalı mıdır?

2. Bir Hausdorff uzayında bir dizinin en çok bir limitinin olabileceğini gösteriniz.

3. Bir Hausdorff uzayında bir A kümesinin bir yığılma noktasının her komşuluğu A ya ait sonsuz noktayı içerir.

4. Bir küme üzerinde en kaba T_1-topolojisinin sonlu tümleyenler topolojisi olduğunu gösteriniz.

5. Her sonlu T_1-uzayının ayrık olduğunu gösteriniz.

6. Sonlu tümleyenler topolojisinin bir Hausdorff topolojisi olmadığını gösteriniz.

7. Bir T_1-uzayının sonlu bir alt-kümesinin bir yığılma noktasının olmayacağını gösteriniz.

8. Bir T_1 uzayının her alt-uzayı da bir T_1 uzayıdır. Gösteriniz.

9. Bir düzenli uzayın her alt-uzayı da düzenlidir. Gösteriniz.

10. Her T_3 uzayı aynı zamanda bir Hausdorff uzayıdır. Gösteriniz.

11. Bir T_4 -uzayının bir alt-uzayının yine bir T_4 uzayı olması gerekmez. Bir örnekle gösteriniz.

14.10 KARMA PROBLEMLER

1. Her n doğal sayısı için X_n kümesi 0 ile 1 öğelerinden oluşan kümeye eşit olsun; yani $X_n = \{0, 1\}$ olsun. Bu kümeler üzerinde ayrık topolojiyi varsayalım. Şimdi $X = \Pi X_n, \quad n \in \mathbb{N}$ çarpım uzayını düşünelim. Her n doğal sayısı için $V_n = \{0\}$ kümesi çarpan uzaylarda açıktır. Ama $V = \Pi V_n, \quad n \in \mathbb{N}$, kartezyen çarpımı, çarpım uzay içinde açık bir küme değildir. Gösteriniz.

2. X ile Y iki topolojik uzay ve $A \subset B$ ile $B \subset Y$ kapalı iseler $A \times B$ nin çarpım uzayda kapalı olduğunu gösteriniz.

3. X ile Y iki topolojik uzay ve $W \subset X \times Y$ çarpım uzayda açık ise

   (a) $\pi_1(W) \subset X$ ile $\pi_2(W) \subset Y$ izdüşümlerinin açık kümeler olduğunu gösteriniz.

   (b) Yukarıdaki özeliğin kapalı kümeler için genel olarak sağlanmadığını bir örnekle gösteriniz.

4. $(X_i, \mathscr{T}_i)$ uzaylarının herbiri içinde kapalı olan bir $K_i \subset X_i$ kümesi veriliyor. $K_1 \times K_2 \times K_3 \times \cdots \times K_n$ kümesinin $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n$ çarpım uzayında kapalı olduğunu gösteriniz.

5. Çarpım uzaydan çarpan uzaylara tanımlı izdüşüm fonksiyonlarının örten olduğunu gösteriniz.

6. Çarpım uzaydan çarpan uzaylara tanımlı izdüşüm fonksiyonlarının sürekli olduğunu gösteriniz.

7. Çarpım uzaydan çarpan uzaylara tanımlı izdüşüm fonksiyonlarının açık olduğunu gösteriniz.

8. $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ fonksiyonu X uzayının yoğun alt kümelerini Y uzayının yoğun alt kümelerine resmederse, sürekli midir? Simgelerle söylersek,

$$\bar{A} = X \Rightarrow \overline{f(A)} = Y \tag{14.13}$$

olması f fonksiyonunun sürekli olmasını gerektirir mi? Neden?

9. X bir topolojik uzay ise

$$\Delta = \{(x, x) : \ x \in x\} \subset X \times X \tag{14.14}$$

köşegeninin $X \times X$ çarpım uzayında kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul X uzayının Hausdorff olmasıdır.

10. Bir çarpım uzaydan bileşen uzaylara tanımlı izdüşüm fonksiyonları birer bölüm dönüşümüdür; yani $(X_i, \mathscr{T}_i)$ uzayları verilmişse

$$\pi_i : X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n \longrightarrow X_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

dönüşümleri birer bölüm dönüşümüdür. Gösteriniz.