Bölüm 13

SÜZGEÇLER

13.1 SÜZGEÇ KAVRAMI

Komşuluklar sistemiyle topolojik yapıların nasıl kurulduğunu incelemiştik (bkz. Önerme 5.1.1). Şimdi komşuluklar sistemini tanımlamak için süzgeç kavramını kullanacağız. *Süzgeç* kavramı, oldukça ilkel bir kavramdır ve öğrenci analiz derslerinde dizi kavramını nasıl rahatlıkla kullanıyorsa, bu kavramı da o kadar rahatlıkla kullanmaya alışmalıdır. Süzgeç kavramı, topolojik yapıya dayanmadan tanımlanacak ve buradan bir topolojik yapı elde edilecektir. Ayrıca bir topolojik yapı varsa, buradan hareketle bir süzgeç kavramına gidilebileceği de gösterilerek; süzgeç kavramının, yeni bir topolojik yapı kurma yöntemi getirdiği sonucuna varılacaktır.

Tanım 13.1.1. Bir X kümesinin alt-kümelerinden oluşan bir $\mathscr{S}$ ailesine, eğer aşağıdaki üç koşulu sağlıyorsa, X üzerinde bir *süzgeçtir* denilir;

[S1] Boş küme $\mathscr{S}$ ye ait değildir;
[S2] $\mathscr{S}$ ye ait her hangi iki kümenin arakesiti yine $\mathscr{S}$ ye aittir;
[S3] $\mathscr{S}$ ye ait her hangi bir kümeyi kapsayan her küme yine $\mathscr{S}$ ye aittir.

Bu üç özelliğe *süzgeç aksiyomları* diyeceğiz.

[S1] ve [S2] den hemen görüleceği üzere $\mathscr{S}$ ye ait sonlu sayıdaki kümelerin arakesiti boş değildir.

Tanım 13.1.2. X kümesi üzerindeki bir $\mathscr{S}$ süzgeci bu küme üzerinde bir yapıdır; bu yapıya *süzülmüş* bir yapı ve X kümesine de $\mathscr{S}$ ile *süzülmüş bir küme* denilir:

Örnek 13.1.1. $X \neq \emptyset$ ise $\mathscr{S} = \{X\}$ ailesi; yani yalnız X kümesinden oluşan aile kendisi üzerinde bir süzgeçtir.

Örnek 13.1.2. X kümesinin boş olmayan bir A alt-kümesi verilsin

$$\mathscr{S} = \{S \mid A \subset S \subset X\}$$

ailesi, X üzerinde bir süzgeçtir.

Örnek 13.1.3. *(Frèchet Süzgeci)* $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi içindeki bütün sonlu alt-kümelerin tümleyenlerinin oluşturduğu aile $\mathbb{N}$ üzerinde bir süzgeçtir.

Örnek 13.1.4. Sonsuz bir X kümesi içindeki bütün sonlu alt kümelerin tümleyenlerinin oluşturduğu aile X üzerinde bir süzgeçtir. Buna *sonlu tümleyenler süzgeci* diyeceğiz.

Örnek 13.1.5. $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ dizisinin sonlu tümleyenler süzgecine, bu dizinin *bileşen süzgeci* denilir.

Teorem 13.1.1. *$(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay ise, her $x \in X$ noktası için $\mathscr{B}(x)$ komşuluklar ailesi X üzerinde bir süzgeçtir.*

Bu süzgece x noktasının *komşuluklar süzgeci* denilir.

İ s p a t: Önerme 5.1.2 den verilen [N3], [N2], [N1] komşuluk aksiyomları, sırasıyla [S1], [S2], [S3] süzgeç aksiyomlarının sağlandığını gösterir.

Teorem 13.1.2. *Bir X kümesi verilsin. Eğer her $x \in X$ noktasına karşılık aşağıdaki iki özelliği sağlayan bir $\mathscr{S}(x)$ süzgeci varsa, X üzerinde öyle bir tek $\mathscr{T}$ topolojik yapısı vardır ki, $\mathscr{S}(x)$ süzgeci x noktasının $\mathscr{T}$-komşuluklarından ibaret olur;*

[KS1] $\mathscr{S}(x)$ süzgecine ait her küme x noktasını içerir;

[KS2] Eğer $V \in \mathscr{S}(x)$ ise, öyle bir $W \in \mathscr{S}(x)$ vardır ki her $y \in W$ için $V \in \mathscr{S}(y)$ olur.

İ s p a t: [S1], [S3] süzgeç aksiyomları ile [KS1], [KS2] özelikleri [N1] - [N4] komşuluk aksiyomlarına eşdeğer olduğundan, istenen şey `Önerme` 5.2.1 den çıkar.

Böylece, başta söylediğimiz gibi, süzgeçlerle topolojik yapılar arasında bir bağıntı kurmuş oluyoruz.

13.2 SÜZGEÇLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Tanım 13.2.1. Aynı bir X kümesi üzerinde $\mathscr{S}_1$ ve $\mathscr{S}_2$ süzgeçleri verilmiş olsun. $\mathscr{S}_2 \subset \mathscr{S}_1$ ise, $\mathscr{S}_2$ süzgeci $\mathscr{S}_1$ den *daha kabadır*; ya da $\mathscr{S}_1$ süzgeci $\mathscr{S}_2$ den *daha incedir*, denilir. Eğer ayrıca $\mathscr{S}_1 \neq \mathscr{S}_2$ ise $\mathscr{S}_2$ süzgeci $\mathscr{S}_1$ den *kesinlikle daha kabadır*, diyeceğiz. $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2$ ve $\mathscr{S}_1 \supset \mathscr{S}_2$ ise bu iki süzgeç birbirine eşittir. Bu durumda $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_2$ yazarız.

Tabii iki süzgecin karşılaştırılabilmesi için birisinin ötekinden daha kaba olması gerekir. $\mathfrak{X}$ ile, bir X kümesi üzerindeki süzgeçleri gösterelim. $\mathscr{S}_2$ süzgeci $\mathscr{S}_1$ den *daha kaba* (ya da daha ince olma) bağıntısına göre $\mathfrak{X}$ ailesi tikel sıralıdır; (yani $(\mathfrak{X}, \subset)$ tikel sıralanmış bir sistemdir.

Önerme 13.2.1. *Bir X kümesi üzerinde boş olmayan bir $\{\mathscr{S}_\imath : \imath \in I\}$ süzgeçler ailesi verilmiş olsun.*

$$\mathscr{S} = \bigcap_{\imath \in I} \mathscr{S}_\imath = \{S \,:\, (\forall \imath \in I)\, S \in \mathscr{S}_\imath\} \tag{13.1}$$

arakesiti de X üzerinde bir süzgeçtir.

İ S P A T: $\mathscr{S}$ nin süzgeç aksiyomlarını sağladığı kolayca gösterilebilir.

Süzgeçler için yukarıda tanımlanan sıralama bağıntısına göre, (13.1) arakesiti ile verilen $\mathscr{S}$ süzgecinin $\{\mathscr{S}_\imath : \imath \in I\}$ süzgeçlerinin en büyük alt sınırı (inf) olduğu apaçıktır.

Şimdi, bir X kümesinin alt-kümelerinden oluşan bir $\mathfrak{s}$ ailesini içeren bir $\mathscr{S}$ süzgecinin ne zaman varolacağı sorusuna yanıt arayalım.

Önerme 13.2.2. *Bir X kümesinin alt-kümelerinden oluşan bir $\mathfrak{s}$ ailesi verilsin. Eğer $\mathfrak{s}$ nin hiçbir sonlu arakesiti boş değilse, X üzerinde , $\mathfrak{s}$ yi içeren bir $\mathscr{S}$ süzgeci vardır.*

İ S P A T: $\mathfrak{s}$ nin bütün sonlu arakesitlerinden oluşan aileyi $\mathcal{S}$ ile gösterelim. X kümesinin $\mathcal{S}$ ye ait her hangi bir kümeyi kapsayan bütün alt-kümelerinin oluşturduğu aileye $\mathscr{S}$ diyelim. Boş küme $\mathcal{S}$ ye ait olmadığı için, boş küme $\mathscr{S}$ ye de ait olamaz. $A_1, A_2 \in \mathscr{S}$ olsun. $\mathscr{S}$ nin tanımı gereğince $B_1 \subset A_1$ ve $B_2 \subset A_2$ olacak şekilde $B_1, B_2 \in \mathcal{S}$ vardır. $\mathcal{S}$ nin tanımı gereğince $\emptyset \neq B_1 \cap B_2 \in \mathcal{S}$, dir ve $B_1 \cap B_2 \subset A_1 \cap A_2$ olduğundan $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{S}$ olur. Son olarak $F \supset A \in \mathscr{S}$ olan bir F alt-kümesi düşünelim. $\mathscr{S}$ nin tanımı gereğince $A \supset B \in \mathcal{S}$ olacak şekilde bir B kümesi vardır ve bu durumda $F \supset B$ olacağından $F \in \mathscr{S}$ olmak zorundadır.

Tanım 13.2.2. Yukarıdaki önermede tanımlanan $\mathscr{S}$ süzgecine, verilen $\mathfrak{s}$ ailesinin *doğurduğu süzgeç*, ya da $\mathfrak{s}$ ailesinin *ürettiği süzgeç* denilir. Bu durumda $\mathfrak{s}$ ye $\mathscr{S}$ nin bir *alt tabanıdır*, diyeceğiz.

Önerme 13.2.3. *Bir $\mathfrak{s}$ ailesinin doğurduğu $\mathscr{S}$ süzgeci, $\mathfrak{s}$ ailesini kapsayan süzgeçlerin en kabasıdır.*

İ S P A T: $\mathfrak{s}$ yı kapsayan bir $\mathscr{F}$ süzgeci verilsin; yani $\mathfrak{s} \subset \mathscr{F}$ olsun. $\mathscr{S} \subset \mathscr{F}$ olacağını göstermeliyiz. Gerçekten, `Önerme` 13.2.2 deki gösterimler altında $\mathfrak{s} \subset \mathcal{S} \subset \mathscr{F}$ olacağı apaçıktır. Tanımı gereğince, her $A \in \mathscr{S}$ için $B \subset A$ olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{s}$ kümesi vardır. Buradan $B \in \mathscr{F}$ olduğu düşünülürse, [S3] aksiyomundan $A \in \mathscr{F}$ çıkar. Bu, istenen şeyi verir.

Önerme 13.2.4. *$\mathscr{S}$ ailesi X kümesi üzerinde bir süzgeç olsun ve bir $A \subset X$ alt-kümesi verilsin. X üzerinde $A \in \mathscr{S}_1$ ve $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}_1$ olacak şekilde bir $\mathscr{S}_1$ süzgecinin varolması için gerekli ve yeterli koşul, $\mathscr{S}$ ye ait kümelerin hiçbirinin A ile arakesitinin boş olmamasıdır.*

İ S P A T: Eğer istenenleri sağlayan bir $\mathscr{S}_1$ süzgeci varsa $[S2]$ aksiyomundan koşulun gerekliği çıkar. Tersine olarak, koşul sağlanıyorsa, $\mathfrak{s} = \{A, \mathscr{S}\}$ nın doğurduğu $\mathscr{S}_1$ süzgeci istenenleri sağlar.

Önerme 13.2.5. *X kümesi üzerinde $\mathcal{S} = \{\mathscr{S}_\imath : \imath \in I\}$ süzgeçler ailesi verilsin. $\mathcal{S}$ nin bir en küçük üst sınırının (sup) olması için gerekli ve yeterli koşul, $\mathcal{S}$ nin her sonlu $\{\mathscr{S}_i : 1 \leq i \leq n\}$ alt ailesi ve her $A_i \in \mathscr{S}_i$, $(1 \leq i \leq n)$ için $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ arakesitinin boş olmamasıdır.*

İ S P A T: $\mathcal{S}$ nin $\mathscr{S}$ ile göstereceğimiz *en küçük üst sınırı* varsa $[S2]$ aksiyomu gereğince koşulun sağlanması gerekir. Tersine olarak, koşul sağlanıyorsa

$$\mathfrak{s} = \{S : (\exists \imath \in I)\ S \in \mathscr{S}_\imath\}$$

ailesinin doğurduğu $\mathscr{S}$ süzgeci $\mathcal{S}$ nin en küçük üst sınırıdır.

Tanım 13.2.3. X kümesi üzerinde bir $\mathscr{S}$ süzgeci verilsin. Eğer X üzerinde $\mathscr{S}$ den daha ince bir süzgeç yoksa, $\mathscr{S}$ ye *aşkın (ultra) bir süzgeçtir*, denilir.

X kümesi üzerindeki bütün süzgeçler ailesi kapsama bağıntısına göre tikel sıralanmış bir kümedir. Tikel sıralanmış bu sistem içindeki büyükçe (maximal) öğeler aşkın süzgeçlerdir. Üstelik, bu sistem içinde her hangi bir zincir alsak, $\mathscr{Z}$ diyelim, `Önerme` 13.2.5 uyarınca, $\mathscr{Z}$ nin bir en küçük üst sınırı vardır. Yani bu sistem içindeki her zincirin bir en büyük öğesi vardır. Öyleyse, *Zorn Teoremine* göre, şu önermeyi söyleyebiliriz:

Önerme 13.2.6. *X üzerindeki her $\mathscr{S}$ süzgecine karşılık $\mathscr{S}$ den daha ince olan bir aşkın süzgeç vardır.*

13.2.1 Problemler

1. Sonlu bir küme üzerindeki bütün mümkün süzgeçleri bulunuz.

2. Sonsuz bir X kümesi üzerindeki bir $\mathscr{S}$ süzgecinin bütün kümelerinin arakesiti boş ise, bunun X üzerindeki sonlu tümleyenler süzgecinden daha ince olduğunu gösteriniz.

3. $\mathscr{S}$ ve $\mathscr{H}$ bir X kümesi üzerinde iki süzgeç olsun. X üzerindeki süzgeçler arasında bu ikisinin bir en küçük üst sınırı varsa, bunun

$$\mathscr{D} = \{S \cap H \quad | \quad S \in \mathscr{S},\ H \in \mathscr{H}\}$$

olduğunu gösteriniz.

4. $\mathscr{S}_\infty$ ailesi $\mathbb{R}$ nin $(a, \infty), a \in \mathbb{R}$ şeklinde bir aralığını içeren bütün alt-kümelerinden oluşsun. Bu ailenin $\mathbb{R}$ üzerinde bir süzgeç oluşturacağını gösteriniz.

5. $\mathscr{S}$ ailesi X üzerinde bir süzgeç olsun ve bir $A \subset X$ alt-kümesi verilsin. $\mathscr{S}$ nin A üzerindeki $\mathscr{S}_A$ izinin (trace) bir süzgeç olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathscr{S}$ nin her kümesinin A ile kesişmesidir. Gösteriniz.

6. $\mathscr{F}$ ailesi X kümesi üzerinde bir aşkın süzgeç (ultra filter) olsun. Eğer

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \mathscr{F}$$

ise, $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ kümelerinden en az bir tanesi $\mathscr{F}$ aşkın süzgecine aittir. Gösteriniz.

13.3 SÜZGEÇ TABANLARI

Tanım 13.3.1. Aşağıdaki iki niteliğe sahip bir $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ ailesine, X üzerinde bir *süzgeç tabanıdır* denilir;

1. [B1] $\mathscr{B} \neq \emptyset$ ve $\emptyset \notin \mathscr{B}$;

2. [B2] $\mathscr{B}$ ye ait her hangi iki kümesinin arakesiti $\mathscr{B}$ ye ait bir kümeyi kapsar.

Örnek 13.3.1. $\mathfrak{s}$ bir $\mathscr{S}$ süzgecinin alt-tabanı ise, $\mathfrak{s}$ nin $\mathbb{S}$ ile gösterdiğimiz bütün sonlu arakesitleri ailesi $\mathscr{S}$ süzgecinin bir tabanıdır (bkz. `Önerme` 13.2.2).

Örnek 13.3.2. X kümesi içinde $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ dizisi verilsin. Her $p \in \mathbb{N}$ için $S_p = \{x_n \,|\, n \geq p\}$ olmak üzere

$$\mathscr{B} = \{S_p \quad | \quad p \in \mathbb{N}\}$$

ailesi X üzerinde bir süzgeç tabanıdır.

İSPAT: Her $p \in \mathbb{N}$ için $Sp \neq \emptyset$ olduğundan $\mathscr{B} \notin \emptyset$ dir; ayrıca, $\mathbb{N} \neq \emptyset$ olduğundan $\mathscr{B} \neq \emptyset$ dir; yani $\mathscr{B}$ ailesi $[B1]$ aksiyomunu sağlar.

Öte yandan her $p, q \in \mathbb{N}$ için

$$S_p \cap S_q = S_r, \quad r = \max\{p, q\}$$

olduğundan $[B2]$ aksiyomu da sağlanır. Öyleyse $\mathscr{B}, X$ üzerinde bir süzgeç tabanıdır. Buna, verilen *dizinin bileşen süzgeç tabanı* denilir.

Örnek 13.3.3. $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayında $x \in X$ noktasının $\mathfrak{S}(x)$ komşuluklar tabanı, X üzerinde bir süzgeç tabanıdır.

İSPAT: $\mathfrak{S}(x) \neq \emptyset$ ve her $S \in \mathfrak{S}(x)$ kümesi x noksanının bir komşuluğu olduğundan $x \in S$ dir; dolayısıyla $S \neq \emptyset$ tur; bu demek $\emptyset \notin \mathfrak{S}(x)$ dir. Öyleyse $\mathfrak{S}(x)$ ailesi $[B1]$ aksiyomunu sağlar.

$[B2]$ aksiyomunun sağlandığını göstermek için $S_1, S_2 \in \mathfrak{S}(x)$ alalım. S_1 ve S_2 kümeleri x noktasının komşulukları olduğundan $S_1 \cap S_2$ arakesiti de x noktasının bir komşuluğudur; dolayısıyla $S_3 \subset S_1 \cap S_2$ olacak şekilde bir $S_3 \in \mathfrak{S}(x)$ vardır. (bkz. `Tanım` 5.3.1)

Tanım 13.3.2. X üzerinde $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ süzgeç tabanları verilmiş olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa, bu ikisi birbirine denk iki süzgeç tabanıdır.

(i) Her $A_1 \in \mathscr{B}_1$ kümesi bir $A_2 \in \mathscr{B}_2$ kümesini kapsar;

(ii) Her $A_2 \in \mathscr{B}_2$ kümesi bir $A_1 \in \mathscr{B}_1$ kümesini kapsar;

$\mathscr{B}_1$ ile $\mathscr{B}_2$ denk iseler, kısaca, $\mathscr{B}_1 \sim \mathscr{B}_2$ yazacağız. Denk iki süzgeç tabanı aynı süzgeci üretirler.

Örnek 13.3.4. $(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay olsun ve bir $x \in X$ noktası verilsin. Eğer $\mathfrak{S}_1(x)$ ve $\mathfrak{S}_2(x)$ aileleri x noktasının iki ayrı *yerel tabanı* ise, bu ikisi denk iki süzgeç tabanıdır.

İSPAT: $A_1 \in \mathscr{S}(x)$ ise, A_1 kümesi x noktasının bir komşuluğudur; dolayısıyla $\mathscr{S}_2(x)$ tabanına ait bir A_2 kümesini kapsayacaktır (bkz. `Tanım` 5.3.1) O halde (i) sağlanır. (ii) nın sağlandığı da benzer yolla görülür.

Önerme 13.3.1. *X üzerinde bir $\mathscr{S}$ süzgeci ve bir $\mathscr{B} \subset \mathscr{S}$ alt-ailesi verilsin. Eğer her $S \in \mathscr{S}$ kümesi bir $B \in \mathscr{B}$ kümesini kapsıyorsa $\mathscr{B}$ ailesi $\mathscr{S}$ nin bir (süzgeç) tabanıdır.*

Başka bir deyişle, $\mathscr{S}$ ailesi, X kümesinin, $\mathscr{B}$ ye ait bir kümeyi kapsayan bütün alt-kümelerinden oluşur. Tabii, $\mathscr{B}$ nin bir süzgeç tabanı olduğunu görmek kolaydır.

Önerme 13.3.2. *X üzerinde $\mathscr{S}_1$ ile $\mathscr{S}_2$ süzgeçleri verilsin ve sırasıyla $\mathscr{B}_1$ ile $\mathscr{B}_2$ bunların birer tabanı olsunlar. $\mathscr{S}_1$ süzgecinin $\mathscr{S}_2$ den daha ince olması için gerekli ve yeterli koşul, her $B_2 \in \mathscr{B}_2$ kümesinin bir $B_1 \in \mathscr{B}_1$ kümesini kapsamasıdır.*

İ S P A T: $\mathscr{S}_2 \subset \mathscr{S}_1$ ise $\mathscr{B}_2 \subset \mathscr{S}_2 \subset \mathscr{S}_1$ olacağı düşünüldüğünde her $B_2 \in \mathscr{B}_2$ için $B_2 \in \mathscr{S}_1$ olur. $\mathscr{B}_1$ ailesi, $\mathscr{S}_1$ süzgecinin bir tabanı olduğundan, önceki önerme gereğince, $B_1 \subset B_2$ olacak şekilde bir $B_1 \in \mathscr{B}_1$ varolacaktır; yani koşul gereklidir.

Yeterliğini görmek için bir $S_2 \in \mathscr{S}_2$ alalım. Taban tanımına göre $B_2 \subset S_2$ olacak şekilde bir $B_2 \in \mathscr{B}_2$ vardır. Eğer verilen koşul sağlanıyorsa $B_1 \subset B_2$ olacak şekilde bir $B_1 \in \mathscr{B}_1$ vardır. O halde $B_1 \subset S_2$ dir. Oysa, taban tanımından, $S_2 \in \mathscr{S}_1$ olması gerekir; demek ki $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_1$dir.

Önerme 13.3.3. *X ve Y kümeleri ile bir $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. $\mathscr{B}$ ailesi X kümesi üzerinde bir süzgeç tabanı ise,*

$$f(\mathscr{B}) = \{f(A) \quad | \quad A \in \mathscr{B}\}$$

resmi Y üzerinde bir süzgeç tabanıdır.

İ S P A T:

$$\mathscr{B} \neq \emptyset \Leftrightarrow f(\mathscr{B}) \neq \emptyset$$

dir.

$$A \neq \emptyset \Rightarrow f(A) \neq \emptyset$$

ve $\mathscr{B} \not\ni \emptyset$ olduğundan $f(\mathscr{B}) \neq \emptyset$ çıkar; yani $f(\mathscr{B})$ ailesi [B1] aksiyomunu sağlar. $[B2]$ nin sağlandığını görmek için $f(A_1), f(A_2) \in f(\mathscr{B})$ alalım. $\mathscr{B}$ bir süzgeç tabanı olduğundan $A_3 \subset A_1 \cap A_2$ olacak şekilde bir $A_3 \in \mathscr{B}$ vardır ki bu durumda

$$f(A_3) \subset f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$

olur.

Sonuç 13.3.1. *X üzerinde $\mathscr{S}_1$ ve $\mathscr{S}_2$ süzgeçleri verilsin. Bunların birer tabanı, sırasıyla, $\mathscr{B}_1$ ve $\mathscr{B}_2$ olsun. Eğer $\mathscr{S}_1$ süzgeci $\mathscr{S}_2$ den daha ince ise, Y üzerinde $f(\mathscr{B}_1)$ resminin taban olduğu süzgeç, $f(\mathscr{B}_2)$ nin taban olduğu süzgeçten daha incedir.*

İspatı `Önerme` 13.3.2 den hemen görülür.

13.3.1 Problemler

1. X ve Y kümeleri ile bir $f : X \to Y$ fonksiyonu veriliyor. $\mathscr{B}$ ailesi Y kümesi üzerinde bir süzgeç tabanı ise $f^{-1}(\mathscr{B})$ nin X üzerinde bir süzgeç tabanı olması için gerekli ve yeterli koşul, her $B \in \mathscr{B}$ için $f^{-1}(B) \neq \emptyset$ olmasıdır.

2. Önceki problemdeki gösterimler altında $f(f^{-1}(\mathscr{B}))$ ailesinin Y üzerinde bir süzgeç tabanı olduğunu ve bunun doğurduğu süzgecin $\mathscr{B}$ nin doğurduğu süzgeçten daha ince olduğunu gösteriniz. (Yol gösterme: Her B kümesi için $f(f^{-1}(B)) \subset B$ bağıntısı ile `Önerme` 13.3.2 yi kullanınız).

3. $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin ve $\mathscr{B}$ ailesi X kümesi üzerinde bir süzgeç tabanı olsun. $f^{-1}(f(\mathscr{B}))$ nin ürettiği süzgecin, X üzerinde $\mathscr{B}$ nin ürettiği süzgeçten daha kaba olduğunu gösteriniz.

4. Yukarıdaki gösterimler altında f nin bire-bir örten olması için gerekli ve yeterli koşul, X üzerindeki her $\mathscr{B}$ süzgeç tabanı için $f^{-1}(f(\mathscr{B}))$ nin $\mathscr{B}$ ye denk bir süzgeç tabanı olmasıdır. Gösteriniz.

5. $f : X \to Y$ örten bir fonksiyon ve $\mathscr{S}$ ailesi X kümesi üzerinde bir süzgeç ise $f(\mathscr{S})$ nin Y üzerinde bir süzgeç olacağını gösteriniz. *"Örtenlik"* koşulu kalkarsa ne olur?

6. Yalnızca iki öğesi olan $X = \{x, y\}$ kümesi üzerinde ayrık olmayan topoloji var olsun.

(a) $\mathscr{S} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ ailesinin bir süzgeç olduğunu gösteriniz.

(b) $\mathscr{S}$ süzgecinin hem x, hem y noktasına yakınsadığını gösteriniz.

(c) Buradan, bir süzgecin limitinin tek olmayabileceği sonucunu çıkarınız.

7. Sonlu bir X kümesi üzerindeki her $\mathfrak{U}$ aşkın süzgeci için

$$\mathfrak{U} = \{A \,:\, A \subset X,\ x \in A\}$$

olacak şekilde bir $x \in X$ noktası vardır. Gösteriniz.

8. $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ bir ağ ise

$$\{(x_\lambda) \,:\, \lambda, \lambda_0 \in \Lambda\,,\ \lambda > \lambda_0\}$$

ailesinin bir süzgeç tabanı olduğunu gösteriniz. Buradan çıkan sonuç şudur: Her ağdan bir süzgeç üretilebilir.

13.4 SÜZGECİN LİMİTİ

LİMİT NOKTASI VE YIĞILMA NOKTASI

Tanım 13.4.1. $(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay ve $\mathscr{S}$ ailesi, X kümesi üzerinde bir süzgeç olsun. Eğer $\mathscr{S}$ süzgeci, bir $x \in X$ noktasının $\mathscr{B}(x)$ komşuluklar süzgecinden daha ince ise, $\mathscr{S}$ süzgeci *x noktasına yakınsıyor* denilir.

Bu durumda x noktasına $\mathscr{S}$ süzgecinin bir *limitidir* , ya da *limit noktasıdır* diyecek ve $\lim \mathscr{S} = x$ ya da $\mathscr{S} \to x$ yazacağız.

Tanım 13.4.2. Bir $\mathscr{B}$ süzgeç tabanının doğurduğu (ürettiği) $\mathscr{S}$ süzgeci bir x noktasına yakınsıyorsa, $\mathscr{B}$ süzgeç tabanı *x noktasına yakınsıyor*, denilir ve $\lim \mathscr{B} = x$ ya da $\mathscr{B} \to x$ yazılır.

Önerme 13.4.1. *Bir $\mathscr{B}$ süzgeç tabanının bir x noktasına yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul, $\mathfrak{S}(x)$ yerel tabanına ait her kümenin $\mathscr{B}$ ye ait bir kümeyi kapsıyor olmasıdır.*

İ S P A T: $\mathscr{B}$ nin doğurduğu süzgeç $\mathscr{S}$ olsun. $\mathscr{S}$ süzgecinin $\mathscr{B}(x)$ komşuluklar süzgecinden daha ince olması için önermemizdeki koşulun gerekli ve yeterli olduğunu `Önerme` 13.3.2 den biliyoruz.

`Tanım` 13.4.1 gereğince, $\mathscr{S}$ süzgeci bir x noktasına yakınsıyorsa $\mathscr{S}$ den daha ince olan her süzgeç de x noktasına yakınsayacaktır. Benzer düşünüşle, eğer daha kaba bir topoloji alırsak, komşuluklar süzgeci daha kaba olacağından $\mathscr{S}$ süzgecinin yakınsaklığı bozulmaz. Başka bir deyişle, topolojik yapı inceldikçe yakınsak süzgeçler azalır; topolojik yapı kabalaştıkça yakınsak süzgeçler çoğalır.

Bir süzgeç ya da bir süzgeç tabanı birden çok noktaya yakınsayabilir.

Tanım 13.4.3. $(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay ve $\mathscr{B}$ ailesi X üzerinde de bir süzgeç tabanı olsun. $\mathscr{B}$ ye ait her kümenin kaplamı tarafından içerilen bir x noktasına *$\mathscr{B}$ süzgeç tabanının bir yığılma (kaplama, cluster) noktasıdır* , denilir.

Eğer x noktası bir $\mathscr{B}$ süzgeç tabanının bir yığılma noktası ise, süzgeçlerin denklik tanımı uyarınca, bu nokta $\mathscr{B}$ ye denk olan her süzgeç tabanının da bir yığılma noktası olacaktır.

Önerme 13.4.2. *Bir x noktasının bir $\mathscr{B}$ süzgeç tabanının bir yığılma noktası olması için gerekli ve yeterli koşul, x noktasının komşuluklar tabanına ait her kümenin $\mathscr{B}$ ye ait her kümeyle kesişmesidir.*

İ S P A T: Süzgecin yığılma noktası tanımından hemen görülür.

Uyarı 13.4.1. Her süzgeç özel olarak, bir süzgeç tabanı olduğundan, yukarıdaki tanımda *süzgeç tabanı* yerine *süzgeç* konularak bir süzgeçin yığılma noktaları tanımlanabilir.

Önerme 13.4.3. *Bir x noktasının bir $\mathscr{S}$ süzgecinin bir yığılma noktası olması için gerekli ve yeterli koşul, x noktasına yakınsayan ve $\mathscr{S}$ den daha ince olan bir $\mathscr{F}$ süzgecinin varlığıdır.*

İSPAT:

Gerekliği: x noktası $\mathscr{S}$ nin bir *yığılma noktası* olsun. $\mathscr{B}(x)$ komşuluklar süzgecinin her öğesi ile $\mathscr{S}$ süzgecinin her öğesi kesiştiğinden (bkz. `Önerme` 13.4.2), $\mathscr{S}$ ile $\mathscr{B}(x)$ süzgeçlerinden oluşan süzgeçler ailesinin `Önerme` 13.2.5 nin varsayımlarını sağladığı apaçıktır. O halde bu iki süzgecin en küçük üst sınırı (eküs - sup) vardır; buna $\mathscr{F}$ diyelim. $\mathscr{B}(x) \subset \mathscr{F}$ olduğundan $\mathscr{F}$ süzgeci x noktasına yakınsar.

Yeterliği: Tersine olarak $\mathscr{S}$ den daha ince olan ve x noktasına yakınsayan bir $\mathscr{F}$ süzgeci varsa $\mathscr{S} \subset \mathscr{F}$ ve $\mathscr{B}(x) \subset \mathscr{F}$ olur. Önerme 13.4.2 gereğince, $\mathscr{S}$ ye ait her küme $\mathscr{B}(x)$ in her kümesiyle kesişmek zorundadır. Bu durum, x noktasının $\mathscr{S}$ için bir *yığılma noktası* olmasını gerektirir.

Önerme 13.4.4. *Bir topolojik uzayda bir süzgeç tabanının yığılma noktalarından oluşan küme kapalıdır.*

İ S P A T: Tanım gereğince $\mathscr{B}$ süzgeç tabanının yığılma noktaları kümesi

$$\bigcap_{B \in \mathscr{B}} \bar{B}$$

dir ve bu küme [T3] aksiyomu gereğince kapalıdır.

13.5 PROBLEMLER

1. Bir X kümesi üzerinde $\mathscr{T}_1$ ve $\mathscr{T}_2$ topolojileri veriliyor. $\mathscr{T}_1$ topolojisinin $\mathscr{T}_2$ den daha ince dokulu olması için gerekli ve yeterli koşul, $\mathscr{T}_1$ topolojisine göre yakınsak olan her süzgecin $\mathscr{T}_2$ ye göre de aynı noktaya yakınsamasıdır. Gösteriniz.

2. $f : X \to Y$ fonksiyonu bir $x \in X$ noktasında sürekli olsun. x noktası X üzerindeki bir $\mathscr{B}$ süzgeç tabanının bir yığılma noktası ise $f(x)$ noktası Y üzerindeki $f(\mathscr{B})$ *süzgeç tabanının* bir *yığılma* noktasıdır. Gösteriniz.

3. Bir $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayında her hangi bir x noktasının bütün komşuluklarının oluşturduğu $\mathscr{B}(x)$ ailesinin bir süzgeç olduğunu biliyoruz. $\mathscr{B}(x)$ komşuluklar ailesinin her $\mathfrak{S}(x)$ tabanının $\mathscr{B}(x)$ süzgecinin bir tabanı olduğunu gösteriniz.

4. X boş olmayan bir küme ve $x \in X$ olsun.

   $$\mathscr{M} = \{M \,:\, x \in M,\, M \subset X\}$$

   ailesinin bir aşkın süzgeç olduğunu gösteriniz.

5. X sonsuz bir küme olsun. X içinde tümleyenleri sonlu olan bütün alt kümelerin oluşturduğu ailenin bir süzgeç olduğunu gösteriniz. Bunu simgelerle gösterirsek,

   $$\mathscr{F} = \{A \,:\, A \subset X,\, A \,\text{sonlu}\}$$

   ailesi bir süzgeçtir. Gösteriniz.

6. $\mathscr{F}$ ile $\mathscr{G}$ aileleri X üzerinde iki süzgeç ise, bu süzgeçlerin ortak öğelerinden oluşan $\mathscr{H}$ ailesi de X kümesi üzerinde bir süzgeçtir. İki süzgecin ortak öğeleri,
$$\mathscr{H} = \{H : H \in \mathscr{F} \text{ ve } H \in \mathscr{G}\}$$
ailesidir.

7. $\mathscr{F}$ ile $\mathscr{G}$ aileleri X üzerinde iki süzgeç ise, bu süzgeçlere ait karşılıklı kümelerin ikişer ikişer arakesitlerinden oluşan $\mathscr{L}$ ailesi; yani
$$\mathscr{L} = \{F \cap G : F \in \mathscr{F} \text{ ve } G \in \mathscr{G}\}$$
ailesi X kümesi üzerinde bir süzgeç olur mu? Neden?

8. $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayında $\mathscr{T}$ açık kümeler ailesi bir süzgeç tabanı ise, farklı iki noktasının birbirlerinden ayrık komşulukları var olamaz. Simgelerle açıklarsak,
$$[x, y \in X,\ x \neq y] \Longrightarrow [[(A \in \mathscr{B}(x)) \wedge (B \in \mathscr{B}(y))] \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset]$$
olur.

13.6 FONKSİYONUN LİMİTİ

Tanım 13.6.1. $f : X \to (Y, \mathscr{T})$ fonsiyonu ile X kümesi üzerinde bir $\mathscr{S}$ süzgeci verilmiş olsun. Eğer bir $y \in Y$ noktası $f(\mathscr{S})$ süzgeç tabanının bir limit (ya da yığılma) noktası ise, y noktasına f fonksiyonunun, $\mathscr{S}$ ye göre, bir *limit (ya da yığılma) noktasıdır*, denilir ve
$$\lim_{\mathscr{S}} f = y$$
simgesiyle gösterilir. $\mathscr{S}$ süzgecinin belirtilmesi gerekmediği zaman, kısaca,
$$\lim f = y$$
yazılabilir.

Önerme 13.6.1. *Bir $y \in Y$ noktasının $\mathscr{S}$ ye göre f fonksiyonunun bir limit noktası olması için gerekli ve yeterli koşul, y nin Y içindeki her V komşuluğuna karşılık $f(S) \subset V$ olacak şekilde bir $S \in \mathscr{S}$ kümesinin varlığıdır,ki bu, $[S3]$ gereğince $f^{-1}(V) \in \mathscr{S}$ olmasına eşdeğerdir.*

İSPAT: Önerme 13.4.1 den çıkar.

Önerme 13.6.2. *Bir $y \in Y$ noktasının $\mathscr{S}$ ye göre f fonksiyonunun bir yığılma noktası olması için gerekli ve yeterli koşul, y nin Y içindeki her V komşuluğuna ve her $S \in \mathscr{S}$ kümesine karşılık $f(x) \in V$ olacak şekilde bir $x \in S$ noktasının varlığıdır.*

İSPAT: Önerme 13.4.2 den çıkar.

Önerme 13.6.3. *Bir $f : X \to (Y, \mathscr{T})$ fonksiyonu ile X kümesi üzerinde bir $\mathscr{S}$ süzgeci verilsin. Aşağıdaki iki özelik eşdeğerdir:*

(i) $y \in Y$ noktası $\mathscr{S}$ ye göre f nin bir yığılma noktasıdır.

(ii) X üzerinde $\mathscr{S}$ den daha ince olan öyle bir $\mathscr{F}$ süzgeci vardır ki y noktası $\mathscr{F}$ ye göre f nin bir limit noktasıdır.

İSPAT:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Önerme 13.6.2 gereğince her $V \in \mathscr{B}(y)$ için $f^{-1}(V)$ kümesi $\mathscr{S}$ nin her kümesiyle kesiştiğinden $\mathscr{B}(y)$ komşuluklar süzgecinin $f^{-1}(\mathscr{B}(y))$ ters resmi X üzerinde bir süzgeç tabanıdır (bkz.Problem 13.3.1 (1)). O halde X üzerinde bunun doğurduğu süzgeç ile $\mathscr{S}$ süzgecinden daha ince olan bir $\mathscr{F}$ süzgeci vardır (örneğin, ikisinin eküs'ı (sup) alınabilir; Önerme 13.2.5). Bu durumda Problem 13.3.1 (2)) gereğince, y noktası $\mathscr{S}$ süzgecine göre f nin bir *limit noktasıdır*.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Y üzerinde $f(\mathscr{S})$ süzgeç tabanının doğurduğu $\mathscr{Y}$ süzgeci, $f(\mathscr{F})$ nin doğurduğu $\mathscr{H}$ süzgecinden daha kabadır. Varsayımımız gereğince $\mathscr{H}$ süzgeci y limitine yakınsıyor; o halde Önerme 13.4.3 gereğince, y noktası $\mathscr{Y}$ nin bir yığılma noktası olacaktır. Bu ise, Tanım 13.6.1 gereğince, y noktasının $\mathscr{S}$ ye göre f nin bir *yığılma noktası* olması demektir.

Önerme 13.6.4. *Bir $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{V})$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun bir $x \in X$ noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, X üzerindeki her $\mathscr{S}$ süzgeci için $\mathscr{S} \to x$ olduğunda Y üzerinde $f(\mathscr{S}) \to f(x)$ olmasıdır.*

İSPAT:

Gerekliği: X üzerinde $\mathscr{S} \to x$ olan bir $\mathscr{S}$ süzgeci alalım. Y içinde $f(x)$ noktasının bir V komşuluğunu düşünelim. f sürekli olduğundan $f(W) \subset V$ olacak şekilde X içinde x noktasının bir W komşuluğu vardır. $W \in \mathscr{S}$

olduğundan $V \in f(\mathscr{S})$ olacağı apaçıktır. Bu $f(x)$ noktasının komşuluklar süzgecinin $f(\mathscr{S})$ nin doğurduğu süzgeçten daha kaba olması demektir; yani $f(\mathscr{S}) \to f(x)$ dir.

Yeterliği: $\mathscr{S}$ süzgeci yerine, özel olarak, $\mathscr{B}(x)$ komşuluklar süzgecini alalım. $\mathscr{B}(x) \to x$ olduğundan, varsayımımız gereğince, $f(\mathscr{B}(x)) \to f(x)$ olacaktır. Bu durumda, `Önerme` 13.6.1 gereğince, $f(x)$ noktasının her V komşuluğuna karşılık $f^{-1}(V) \in \mathscr{B}(x)$ olacaktır. Bu ise, f nin x noktasında sürekli olması demektir.

13.7 PROBLEMLER

1. Bir X topolojik uzayında verilen bir $x = (x_n)$ dizisini

$$x : \mathbb{N} \to X; \ \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ için } x(n) = x_n$$

fonksiyonu olarak tanımlamıştık. Bu x fonksiyonunun *Fréchet Süzgeci*ne göre limitinin, (x_n) dizisinin limitinden başka birşey olmadığını gösteriniz.

2. $y \in Y$ noktası $f : X \to (Y, \mathscr{T})$ nun X üzerindeki bir $\mathscr{S}$ süzgecine göre limit (ya da yığılma) noktası olsun. Gösteriniz ki $\mathscr{S}$ süzgeci inceldikçe ve $\mathscr{T}$ topolojisi kabalaştıkça y noktasının limit (ya da yığılma noktası) olma niteliği bozulmaz.

3. Bir fonksiyonun bir süzgece göre bütün yığılma noktalarından oluşan kümenin (boş olabilir) kapalı olduğunu gösteriniz.

4. Birinci sayılabilme Aksiyomunu sağlayan $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayının bir $A \subset X$ alt kümesi veriliyor. $x \in \bar{A}$ olması için gerekli ve yeterli koşul A kümesi içinde x öğesine yakınsayan bir $(x_n, (n \in \mathbb{N})$ dizisinin olmasıdır. Gösteriniz.

5. X kümesi içinde $(x_\lambda), \quad (\lambda \in \Lambda)$ ağı verilsin. Her $\imath$ için $F\imath = \{x_\jmath : \jmath \geq \imath\}$ kümesi tanımlanıyor.

   (a) $\mathcal{F} = \{F_\imath : \imath \in I\}$ ailesinin X kümesi üzerinde bir süzgeç tabanı oluşturduğunu gösteriniz.

   (b) $x_\imath \to p \Leftrightarrow \mathcal{F} \to p$ olduğunu gösteriniz.

6. $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(X)$ süzgeç tabanı verilsin. $\mathcal{F}$ üzerinde $\succeq$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanıyor:
$$U \succeq V \Leftrightarrow U \subseteq V$$
   (a) $(\mathcal{F}, \succeq)$ sisteminin tikel sıralı bir sistem olduğunu gösteriniz.
   (b) Her
   $$(x_U)_{U \in \mathcal{F}} \in \Pi_{U \in \mathcal{F}} U$$
   öğesinin X içinde $(x_U)_{U \in \mathcal{F}} \subset X$ ağını belirlediğini gösteriniz.
   (c) Bu şekilde seçilen her $(x_U)_{U \in \mathcal{F}} \subset X$ ağı için
   $$\mathcal{F} \to p \Leftrightarrow x_U \to p$$
   olduğunu gösteriniz.

7. $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayının bir $A \subset X$ alt kümesi veriliyor.
   (a) $x \in \bar{A}$ olması için gerekli ve yeterli koşul A kümesi içinde x öğesine yakınsayan bir (x_λ), $(\lambda \in \Lambda)$ ağının olmasıdır. Gösteriniz.
   (b) Yukarıda *"ağ"* yerine *"dizi"* konulursa ne olur?
   (c) $x \in \bar{A}$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathscr{P}(A)$ içinde x öğesine yakınsayan bir $\mathscr{F}$ süzgecinin olmasıdır. Gösteriniz.