Bölüm 12

Ağlar

1922 yılında Eliakim Hastings Moore (1862-1932) ve öğrencisi Herman L. Smith tarafından ortaya atılan ağ kavramı topolojik uzayları belirlemekte yetersizlikleri ortaya çıkan dizi kavramını genelleştirmiştir. Yapılan iş şudur: *Dizi* tam (tümel) sıralı sayılabilir bir küme olan doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyondur. Tam sıralı küme yerine yönlenmiş bir küme alınmış ve sayılabilir olma koşulu kaldırılmıştır. Bunun doğal sonucu olarak *dizi* kavramından daha genel olan *ağ (net)* kavramı ortaya çıkmıştır. Bazı kaynaklarda ağ yerine *Moore-Smith dizisi* deyimi kullanılır.

12.1 AĞLARIN YAKINSAMASI

Tanım 12.1.1. Bir Λ kümesi üzerinde $\preccurlyeq$ simgesiyle göstereceğimiz bir bağıntı aşağıdaki özeliklere sahipse, $\preccurlyeq$ bağıntısına Λ kümesini yönlendiriyor ve Λ kümesine de $\preccurlyeq$ bağıntısı ile *yönlenmiş bir kümedir*, diyeceğiz:

(i) Her $\lambda \in \Lambda$ için $\lambda \preccurlyeq \lambda$ dır,

(ii) Her $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ için $\lambda \preccurlyeq \mu$ ve $\mu \preccurlyeq \nu$ olması $\lambda \preccurlyeq \nu$ olmasını gerektirir,

(iii) Her $\lambda, \mu \in \Lambda$ çiftine karşılık öyle bir $\nu \in \Lambda$ öğesi vardır ki $\lambda \preccurlyeq \nu$ ve $\mu \preccurlyeq \nu$ olur.

Bu özeliklerden ilk ikisi, sırasıyla, bağıntının *dönüşlü* ve *geçişli* olduğunu gösterir. Üçüncüsü ise yönlendirme eylemine özgü olan bir özeliktir.

Örnek 12.1.1. Tam sıralanmış her küme *yönlenmiş* bir kümedir. Ama yönlenmiş her kümenin tam sıralı olması gerekmez. Özel olarak, doğal sayılar kümesi yönlenmiş bir kümedir.

Örnek 12.1.2. Bir kümenin bütün sonlu altkümelerinden oluşan aile kapsanma bağıntısına göre yönlenmiş bir kümedir.

Örnek 12.1.3. Bir topolojik uzayda her hangi bir x öğesinin $\mathscr{B}(x)$ ile gösterdiğimiz komşuluklar ailesi

$$U \preccurlyeq V \Leftrightarrow U \supset V, \quad (U, V \in \mathscr{B}\,(x))$$

bağıntısına göre yönlenmiş bir kümedir. Buna *komşulukların doğal yönlenmesi* diyeceğiz.

Tanım 12.1.2. X boş olmayan bir küme ve Λ yönlenmiş bir küme ise $f : \Lambda \to X$ fonksiyonuna bir *ağ (net)* denilir.

f nin değerler kümesi, her $\lambda \in \Lambda$ için $f(\lambda) = x_\lambda$ olmak üzere

$$\{x_\lambda \in X : \lambda \in \Lambda,\ f(\lambda) = x_\lambda\} \subset X$$

kümesidir. X kümesini göstermek gerekmediği zaman, kısalığı sağlamak için

$$\{f(x_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$$

yazabiliriz.

$f(\lambda) = x_\lambda \in X$ öğelerinden her birisine ağın bir *terimi (öğesi)*, x_λ terimindeki λ öğesine terimin *indisi (damgası)* diyeceğiz. Terimleri X kümesine ait olduğu için, ağa X kümesinde bir ağ, denilir.

Diziler için söylediğimiz gibi, ağ dediğimiz f fonksiyonun tanımlı olması için Λ tanım kümesinin, X değerler kümesinin ve her $\lambda \in \Lambda$ için $f(\lambda) = x_\lambda$ gönderim kuralının bilinmesi gerekir. Öyleyse, f ağı tanımlandığında, değerler kümesini biliyor oluruz. O nedenle, f fonksiyonunu söylemeye gerek duymadan, ağı

$$\{x_\lambda \in X : \lambda \in \Lambda\}$$

biçiminde gösterebiliriz. Bu gösterimde x_λ simgesinin $\lambda \to x_\lambda$ gönderim kuralını belirlediğini anlıyor ve f fonksiyonunu yazmıyoruz. Ağın terimlerinin ait olduğu X kümesinin kim olduğu biliniyor ve dolayısıyla onu ayrıca belirtmek gerekmiyorsa, yukarıdaki gösterim yerine

$$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \text{ ya da } (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$$

yazabiliriz.

Gösterimi daha da kısaltmak için, Λ tanım kümesinin kim olduğunu belirtmek gerekmediği zaman, ağı

$$(x_\lambda)$$

simgesiyle de gösterebiliriz.

Tanım 12.1.3. Λ yönlenmiş küme ve aynı sıraya göre yönlenmiş bir $\Delta \subset \Lambda$ altkümesi verilsin. Her $\lambda \in \Lambda$ öğesine karşılık $\lambda \preccurlyeq \delta$ olacak biçimde bir $\delta \in \Delta$ öğesi varsa $\Delta \subset \Lambda$ altkümesine (Λ içinde) *eşsonal (cofinal)* bir altküme denilir.

$f : \Lambda \to X$ bir ağ ve $\Delta \subset \Lambda$ eşsonal ise f nin Δ ya kısıtlanmışı olan $f|_\Delta : \Delta \to X$ fonksiyonuna f ağının bir *altağı* denilir.

Altağ kavramını daha da genelleştirebiliriz.

Tanım 12.1.4. $f : \Lambda \to X$ ve $g : \Gamma \to X$ ağları verilsin. Eğer aşağıdaki iki koşulu sağlayan bir $\pi : \Gamma \to \Lambda$ gönderimi varsa $f \circ \pi : \Gamma \to X$ ağına f nin bir *altağı* denilir.

$$(i)\ \ \gamma \in \Gamma \Rightarrow g(\gamma) = f(\pi(\gamma))$$
$$(ii)\ \ \lambda_0 \in \Lambda \Rightarrow \exists \gamma_0 \in \Gamma\, (\gamma_0 \preccurlyeq \gamma \Rightarrow \lambda_0 \preccurlyeq \pi(\gamma))$$

$a \in X$ sabit bir nokta ise, her $\lambda \in \Lambda$ için $x_\lambda = a$ koşulunu sağlayan (x_λ) ağına *sabit ağ* denir.

Λ yönlenmiş kümesi yerine, özel olarak $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi konulabilir; çünkü doğal sayılar yönlenmiş bir kümedir. Bu durumda ortaya çıkan ağ bir dizi olacaktır. Başka bir deyişle, her dizi bir ağdır. Ama bunun tersi doğru değildir; yani her ağ bir dizi değildir. O nedenle, ağ kavramı dizi kavramından daha geneldir.

Örnek 12.1.4. Bir topolojik uzayda bir x öğesinin her V komşuluğundan bir x_V öğesi seçelim. Bu öğelerden oluşan (x_V) kümesi bir ağdır.

Örnek 12.1.5. X içinde bir (x_λ) ağı ile bir $\varphi : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Bu ağın φ fonksiyonu altındaki $(\varphi(x_\lambda))$ görüntüsü Y içinde bir ağdır.

X kümesi içinde bir (x_λ) ağı ile bir $A \subset X$ altkümesi verilsin. Eğer ağın her öğesi A içindeyse, bu ağ A kümesi içinde bir ağ olacaktır. Ancak, uygulamada, çoğu kez bir ağın öğelerinin ancak belli bir indisten sonra A kümesi içinde olması durumu ile karşılaşırız:

Tanım 12.1.5. Belli bir $\lambda_0 \in \Lambda$ için

$$\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \Rightarrow x_\lambda \in A$$

oluyorsa, (x_λ) *ağının sonal bir kuyruğu A kümesi içinde kalıyor*, denilir.

Diziler için söylediğimiz gibi, uygulamada dizinin terimlerini içeren X kümesi bir matematiksel yapı ile donatılmış olur. Bu bölümde, X üzerinde bir topolojik yapı olduğunu varsayacağız. Böylece, diziler için tanımladığımız yakınsaklık kavramını ağlara genişletebiliriz.

Tanım 12.1.6. Bir topolojik uzay içinde bir (x_λ) ağı verilsin. Bir x öğesinin her komşuluğu (x_λ) ağının sonal bir kuyruğunu içeriyorsa, (x_λ) *ağı x öğesine yakınsıyor* diyecek ve bunu simgesel olarak

$$\begin{aligned} x_\lambda \to x, &\quad \lambda \in \Lambda \\ \lim x_\lambda = x, &\quad \lambda \in \Lambda \\ \lim x_\lambda = x & \end{aligned}$$

gösterimlerinden birisi ile belirteceğiz.

Eğer (x_λ) ağı x öğesine yakınsıyorsa, x öğesine bu *ağın limitidir*, diyeceğiz.

Tabii bir ağın hiç bir limiti olmayayabileceği gibi birden çok limiti de olabilir. Var olduğunda limitin tekliği için uzayın sağlaması gereken özeliği ileride göreceğiz.

Tanım 12.1.7. $\{x_\lambda \in X \mid \lambda \in \Lambda\}$ ağı ve $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer her $\lambda_o \in \Lambda$ için $x_\lambda \in A$ olacak biçimde bir x_λ $(\lambda_0 \preccurlyeq \lambda)$ öğesi varsa, (x_λ) ağı *sıklıkla A içindedir*, denilir.

Bir $x \in X$ noktasının her komşuluğu (x_λ) ağını sıklıkla içeriyorsa, x noktasına (x_λ) ağının bir *yığılma* (cluster, accumulation) noktasıdır, denilir.

Bir ağın yığılma noktası, bir dizinin yığılma noktası kavramının genelleşmiş halidir.

Önerme 12.1.1. *Yakınsak her dizi yakınsak bir ağdır.*

İSPAT: Apaçıktır.

Örnek 12.1.6. `Örnek` 12.1.4 te verilen ağ x noktasına yakınsar.

12.1.1 Problemler

1. Doğal sayılar kümesinin $\leq$ bağıntısına göre yönlenmiş bir küme olduğunu gösteriniz.

2. `Tanım` 12.1.1 deki (iii) koşulu yerine daha güçlü olan aşağıdaki koşulun konulabileceğini gösteriniz:

   Sonlu sayıda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ öğelerine karşılık

   $$\lambda \preccurlyeq \lambda_1,\ \lambda \preccurlyeq \lambda_2,\ \ldots, \lambda \preccurlyeq \lambda_n$$

   eşitsizlikleri sağlayan bir $\lambda \in \Lambda$ öğesi vardır.

3. $(X, \mathscr{T})$ uzayında x noktasının $\mathscr{B}(x)$ komşuluklar ailesinin yönlenmiş bir sistem olduğunu gösteriniz.

4. Kapalı $[a, b]$ aralığında bir f fonksiyonunun Riemann integrali tanımlanırken $[a, b]$ aralığının

   $$a = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n = b \tag{12.1}$$

   bölüntüleri kurulur ve en büyük $[a_{i-1}, a_i]$ alt aralığının uzunluğu sıfıra giderken, Riemann toplamlarının inf ve sup değerlerinin olup olmadığına bakılır. Alt aralıkları iç-içe olan (12.1) bölüntülerinin yönlenmiş bir sistem oluşturduklarını gösteriniz.

5. Bir topolojik uzayda bir x noktası alalım ve bu noktaya karşılık

   $$\mathscr{D}_x = \{(U, t) |\ U \in \mathscr{B}\ (x), t \in U\}$$

   kümesini tanımlayalım. Bu kümenin

   $$(U, t) \preccurlyeq (V, z) \Leftrightarrow U \supset V$$

   bağıntısına göre yönlenmiş bir küme olduğunu gösteriniz. Sonra, öğeleri $\mathscr{D}_x$ kümesiyle indislenen

   $$\{t \,|\, (U, t)\ \in \mathscr{D}_x\}$$

   ağının x noktasına yakınsadığını ispatlayınız.

12.2 AĞLARIN YETERLİĞİ

Diziler için önceden söylediğimiz özellikleri, bu kesimde, daha genel olarak, ağlar yardımıyla elde edeceğiz.

Önerme 12.2.1. *Bir topolojik uzayın her hangi bir A alt-kümesi verilsin. Bir a öğesinin A nın kaplamına ait olması için gerekli ve yeterli koşul, A içinde a ya yakınsayan bir ağın varlığıdır.*

Gerekliği: $a \in \bar{A}$ olsun. Kaplam tanımı uyarınca, a öğesinin her V komşuluğu A kümesiyle kesişecektir. O halde bu arakesitten bir a_V öğesi seçebiliriz. Böylece seçeceğimiz öğelerden oluşan (a_V) ağının a ya yakınsar (bkz. Örnek 12.1.4).

Yeterliği: a içindeki bir (a_λ) ağı bir a öğesine yakınsasın. Yakınsama tanımı uyarınca, a öğesinin bir V komşuluğu (a_λ) ağınının kuyruğunu içeriyor, olacaktır. Bu, $A \cup V \neq \emptyset$ olması demektir. Öyleyse $a \in \bar{A}$ olur.

Sonuç 12.2.1. *Bir topolojik uzayda bir A alt-kümesi için aşağıdaki özelikler sağlanır:*

(i) A kümesinin kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul, A içindeki yakınsak her ağın limitinin A içinde olmasıdır.

(ii) A kümesinin açık olması için gerekli ve yeterli koşul, A içindeki bir a öğesine yakınsayan her ağın kuyruğunun A içinde kalıyor olmasıdır.

İSPAT: **(i)** A kapalı ise $\bar{A} \subset A$ olacaktır. Öte yandan, önceki önerme uyarınca, her $(x_\lambda) \subset A$ için $x_\lambda \to x$ olması $x \in \bar{A} \subset A$ olmasını gerektirir. Tersine olarak, her $a \in A$ için öyle bir $(a_\lambda) \subset A$ vardır ki $a_\lambda \to a$ olur. Varsayım gereğince $a \in A$ dır. Bu $\bar{A} \subset A$ olması; yani A nın kapalı olması demektir.

(ii) A açık bir küme olsun. Bir $a \in A$ öğesine yakınsayan her hangi bir (a_λ) ağı verilsin. A açık olduğundan $a \in T \subset A$ olacak şekilde açık bir T kümesi vardır. Bu küme a nın bir komşuluğu olduğundan, (a_λ) ağının kuyruğu bu küme içinde kalıyor olacaktır; ki bu, koşulun gerekliğini verir. Koşulun yeterliğini olmayana ergi yöntemiyle gösterelim. A içindeki bir öğeye yakınsayan her ağın kuyruğu A içinde kalıyor olsun. Eğer A kümesi açık olmasaydı, en az bir $x \in A$ öğesinin bütün komşulukları A' ile kesişiyor olacaktı. O durumda, her $V \in \mathscr{B}(x)$ için bir $x_V \in V \cap A'$ öğesi seçilerek

x öğesine yakınsıyan bir (x_V) ağı kurulabilir. Bu ağ A' içinde kalacağından, varsayımımızla çelişir.

Bu iki sonuç, *Birinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağlayan uzaylarda dizilerle kurulan açık ve kapalı kümelerin, ağlar yardımıyla her topolojik uzayda kurulabileceği anlamına gelir (bkz. Sonuç 11.2.2). Gerçekten, her hangi bir topolojik uzayın kapalı ve açık kümeleri (i) ve (ii) koşulları ile belirlenebilmektedir. Böylece, dizilerin topolojiyi belirlemekte karşılaştığımız yetersizliğini ağlar yardımıyla giderebiliyoruz.

Önerme 12.2.2. *X uzayından Y uzayına tanımlı olan bir f fonksiyonunun $x \in X$ noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, her (x_λ) ağı için*

$$x_\lambda \to x \Rightarrow f(x_\lambda) \to f(x) \tag{12.2}$$

olmasıdır.

Gerekliği: f fonksiyonu x noktasında sürekli olsun ve bu noktaya yakınsayan bir (x_λ) ağı verilsin. $V \in \mathscr{B}(f(x))$ ise $f^{-1}(V) \in \mathscr{B}(x)$ olacağından yakınsama uyarınca, öyle bir $\lambda_0 \in \Lambda$ vardır ki, $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda$ olduğunda $x_\lambda \in f^{-1}(V)$ olur; ki bu her $\lambda \succeq \lambda_0$ için $f(x_\lambda) \in V$ olmasını gerektirir. Bu ise $(f(x_\lambda))$ ağının $f(x)$ noktasına yakınsaması demektir.

Yeterliği: Olmayana ergi yöntemini kullanacağız. Diyelim ki f fonksiyonu bir x noktasında sürekli değildir. O halde en az bir $V \in \mathscr{B}(f(x))$ için $f^{-1}(V) \notin \mathscr{B}(x)$ olacaktır. Bu durumda, her $U \in \mathscr{B}(x)$ için $x_U \notin f^{-1}(V)$ olacak şekilde bir $x_U \in U$ öğesi seçebiliriz. Bu tür öğelerden oluşan (x_U) ağının x noktasına yakınsayacağını biliyoruz. Varsayım gereğince, $f(x_U) \to f(x)$ olacaktır.

Oysa, bu son yakınsamanın olabilmesi için $(f(x_U))$ ağının kuyruğunun V komşuluğu içinde kalıyor olması gerekir; yani, belli bir yerden sonraki U komşulukları için $f(x_U) \in V$ olmalıdır; ki bu da $x_U \in f^{-1}(V)$ olması demektir. Bu ise, ağın kuruluşu ile çelişir.

Bu önerme, dizisel sürekliliğin yetersizliğini ortadan kaldırmaktadır.

Bu kesimi bitirmeden önce, analiz derslerinde çok sık karşılaşılan bir özeliği daha söylemek yararlı olacaktır.

Tanım 12.2.1. X ile Y birer topolojik uzay olsun ve $A \subset X$ alt-kümesinden Y kümesine bir f fonksiyonu verilsin. Eğer $A - \{x\}$ içindeki her (x_λ) ağı için

$$x_\lambda \to x \Rightarrow f(x_\lambda) \to y$$

oluyorsa, $y \in Y$ noktasına f fonksiyonunun x noktasındaki limitidir, denilir ve bu durumda

$$y = \lim_{t \to x} f(t)$$

yazılır.

Önerme 12.2.3. *Yukarıdaki gösterimler altında*

$$y = \lim_{t \to x} f(t)$$

olması için gerekli ve yeterli koşul her $V \in \mathscr{B}(y)$ *için*

$$x \neq t \in U \cap A \Rightarrow f(t) \in V$$

olacak şekilde bir $U \in \mathscr{B}(x)$ *kümesinin varlığıdır.*

Bu önermenin ispatı yakınsama tanımından hemen çıkarılabilir.

12.2.1 Problemler

1. Bir a noktasının bir A kümesinin bir yığılma noktası olması için gerekli ve yeterli koşul $A - \{a\}$ içinde A noktasına yakınsayan bir ağın varlığıdır. Gösteriniz.
2. Bir topolojik uzayda x noktasının (x_λ) ağının bir yığılma noktası olması için gerekli ve yeterli koşul, (x_λ) ağının bir alt-ağının x noktasına yakınsamasıdır. Gösteriniz.
3. X kümesi üzerinde $\mathscr{T}_1 \preccurlyeq \mathscr{T}_2$ koşulunu sağlayan $\mathscr{T}_1$ ve $\mathscr{T}_2$ topolojileri varsa, bir ağın bu topolojilere göre yakınsamaları arasındaki fark nedir?
4. İçindeki her ağ her noktasına yakınsıyorsa, uzay ayrık değildir. Gösteriniz.
5. Ayrık bir uzayı ağların yakınsaması ile belirleyebilir misiniz?
6. (x_λ) ağı x limitine yakınsıyorsa, her alt ağının da aynı noktaya yakınsadığını gösteriniz.