Bölüm 11

D İ Z İ L E R

Yakınsama ve Analiz

Yakınsama eylemi analizin başlıca uğraş alanlarından birisi olmakla kalmayıp, bu dalın temel araçlarından birisi olmuştur. Bu kısımda, önce, bir dizinin yakınsaklığı kavramının ancak belli uzaylar içinde bir araç olarak kullanılabileceğini göreceğiz. Bu, her topolojik uzayda, yakınsak dizilerin bir araç olarak kullanılmaya yetmediği anlamına gelecektir. Bu yetersizliği yoketmek için, dizi kavramını, *ağlar* ve *süzgeçler* diyeceğimiz daha genel kavramlara genişleteceğiz Daha sonra, bu kavramların her hangi bir topolojik uzayda birer araç olarak yeterlikle kullanılabildiğini görmekle kalmayıp, ağların ve süzgeçlerin topolojik yapılar tanımlamakta da işe yaradığını göstereceğiz.

Ağlar ve süzgeçler, dizi kavramının birer genelleşmesidir. Üstelik, yalnızca yakınsama söz konusu edildiğinde bu ikisi eşdeğer iki kavram olur. Ama kullanılabilme alanları farklıdır. Ağlar klasik analiz yöntemlerine kolayca uygulanabilirler. Buna karşılık, süzgeçler, topolojide çok değişik amaçlar için çok yaygın olarak kullanılabilen bir araçtır.

11.1 DİZİLERİN YAKINSAMASI

Diziler gerçel ve karmaşık analizin önemli bir aracıdır. Birbirlerine denk olan farklı biçimlerde tanımlanabilirler. Burada diziyi, doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olarak ele alacağız. Bu tanım, dizinin genel tanımıdır.

Tanım 11.1.1. X boş olmayan bir küme ise, her $\sigma : \mathbb{N} \to X$ fonksiyonu bir dizidir.

σ nın değerler kümesi, her $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma(n) = x_n$ olmak üzere

$$\{x_n \in X : n \in \mathbb{N},\ \sigma(n) = x_n\} \subset X$$

kümesidir.

$\sigma(n) = x_n \in X$ öğelerinden her birisine dizinin bir *terimi (öğesi)*, x_n terimindeki n sayısına terimin *indisi (damgası)* diyeceğiz. Terimleri X kümesine ait olduğu için, diziye X kümesinde bir `dizi`, denilir.

Bilindiği gibi, dizi dediğimiz σ fonksiyonun tanımlı olması için $\mathbb{N}$ tanım kümesinin, X değerler kümesinin ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma(n) = x_n$ gönderim kuralının bilinmesi gerekir. Öyleyse, σ dizisi tanımlandığında, değerler kümesini kesinlikle biliyor oluruz. O nedenle, σ fonksiyonunu söylemeye gerek duymadan, diziyi

$$\{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$$

biçiminde gösterebiliriz. Bu gösterimde x_n simgesinin $n \to x_n$ gönderim kuralını belirlediğini varsayıyor ve σ fonksiyonunu yazmıyoruz. Dizinin terimlerinin ait olduğu X kümesinin kim olduğu biliniyor ve dolayısıyla onu ayrıca belirtmek gerekmiyorsa, yukarıdaki gösterim yerine

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

gösterimlerinden her hangi birisini yazabiliriz.

Gösterimi daha da kısaltmak için, $\mathbb{N}$ tanım kümesini de gösterimden çıkarabiliriz. Böylece, diziyi

$$(x_n)$$
$$(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$$

simgelerinden biriyle de gösterebiliriz.

Bazen dizi, bütün $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinde değil, onun bir alt kümesinde tanımlı olabilir. Örneğin,

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

gibi yalnızca sonlu sayıda terimi olan diziye *sonlu dizi* denir.

$\{k_r : r = 1, 2, 3, \cdots\} \subset \mathbb{N}$ ve $k_1 < k_2 < \cdots < k_r < k_{r+1} < \cdots$ olmak üzere

$$(x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_r}, \cdots)$$

biçimindeki diziye (x_n) dizisinin bir *altdizisi* denir.

$a \in X$ sabit bir nokta ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = a$ koşulunu sağlayan (x_n) dizisine *sabit dizi* denir.

Diziyi gösteren yukarıdaki simgelerden birisini gördüğümüzde, diziyi tanımlayan bir $\sigma : \mathbb{N} \to X$ fonksiyonunun varlığını anlarız. σ fonksiyonu verildiğinde $\sigma : n \to x_n$ gönderim kuralı, dizinin her bir x_n terimini kesinlikle belirtir. Öyleyse (x_n) dizisi belirli olur.

Tersine olarak, dizi (x_n) biçiminde verildiğinde $\sigma : n \to x_n$ gönderim kuralının belirli olabilmesi için, her $n, m \in \mathbb{N}$ için $n \neq m$ olduğunda $x_n \neq x_m$ olmalıdır. Bu ise, σ nın bire-bir örten olması demektir. Doğal olarak, bu özeliğin her dizi için varlığını bekleyemeyiz. Örneğin, terimleri $x_n = (-1)^n$ eşitliğini sağlayan gerçel terimli $((-1)^n)$ dizisinin tek indisli terimleri birbirleriyle çakışır. Benzer biçimde çift indisli terimleri de birbirleriyle çakışır.

Bu durumlarda, diziyi belirleyen birden çok fonksiyon bulunabilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} \sigma &: n \to (-1)^n, \quad n \geq 0 \\ \delta &: n \to (-1)^{n+1}, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

fonksiyonları aynı diziyi belirler.

Buradan çıkaracağımız sonuç şudur: Diziyi fonksiyon ile değil, terimlerini yazarak gösterdiğimizde, onu belirleyen en az bir fonksiyon vardır. Diziyi belirleyen bu fonksiyonun tek bir tane olabilmesi için, dizinin terimlerinin birbirlerinden farklı olması gerekir.

$((-1)^n)$ dizisinin $\mathbb{R}$ içindeki görüntüsü $\{-1, +1\}$ kümesidir. Ama bu küme dizinin kendisi değil, yalnızca diziyi belirleyen $\sigma : n \to (-1)^n$ fonksiyonunun değerler kümesidir. Bu dizinin terimleri,

$$\{\sigma(0), \sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \cdots, \sigma(n), \cdots\} = \{+1, -1, +1, -1, \cdots, (-1)^n, \cdots\}$$

kümesini oluşturur. Bu küme, terimlerin indislerinin belirlediği sıraya göre *tam sıralı* bir kümedir. Dolayısyla onu $\{-1, +1\}$ kümesinden farklı sayacağız.

Uygulamada dizinin terimlerini içeren X kümesi bir matematiksel yapı ile donatılmış olur. Bu bölümde, X üzerinde bir topolojik yapı olduğunu varsayacağız. Böyle yapınca, gerçel ve karmaşık sayı dizileri için analizden iyi bildiğimiz yakınsaklık kavramını, topolojik uzaylara genişletebileceğiz.

Tanım 11.1.2. $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayı içinde bir (x_n) dizisi verilsin. Eğer bir $x \in X$ noktasının her W komşuluğuna karşılık

$$n \geq n_o \Rightarrow x_n \in W \tag{11.1}$$

olacak şekilde, yalnız verilen diziye ve W komşuluğuna bağlı olan, bir n_0 doğal sayısı varsa (x_n) dizisi *x noktasına yakınsıyor* denilir, ve kısaca,

$$x_n \to x \quad \text{ya da} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x \tag{11.2}$$

yazılır. Bu durumda, x noktasına (x_n) dizisinin *limitidir*, denilir.

Bu tanımın anlamı şudur: Limit noktasının her komşuluğu, ancak sonlu sayıdası hariç, dizinin geri kalan bütün terimlerini içerir; yani komşuluğun dışında kalan terimler ancak sonlu sayıdadır. Başka bir deyişle, indisler büyüdükçe dizinin terimleri limit noktasına yaklaşırlar. Tabii, burada yaklaşımı komşuluklar belirler. Komşuluklar iç-içe kapsamaya göre küçüldükçe yaklaşım artar.

Tanım 11.1.3. $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayı içinde bir (x_n) dizisi verilsin. Eğer bir $x \in X$ noktasının her W komşuluğuna ve her n_0 sayısına karşılık $x_n \in W$ olacak biçimde bir $n > n_0$ sayısı varsa x noktası (x_n) dizisinin bir *yığılma noktasıdır*, denilir.

Bu tanımın anlamı şudur: Yığılma noktasının her komşuluğu, dizinin sonsuz terimini içerir; ama bunların dışında sonsuz sayıda başka terimlerini içermeyebilir. Bu demektir ki, yığılma noktasının yakınında dizinin sonsuz terimi vardır, ama uzağında kalanlar da sonsuz sayıda olabilir.

Uyarı 11.1.1. Yukarıdaki 11.1.3 tanımına göre, dizinin limit noktası aynı zamanda dizinin bir yığılma noktasıdır. Ama bunun tersi doğru olmayabilir; yani dizinin yığılma noktası dizinin limit noktası olmayabilir.

Limit noktası kavramı ile *yığılma noktası* kavramı birbirlerinden farklıdır. Bu farklılığı bazı örneklerle açıklayalım.

Örnek 11.1.1. Sabit dizinin hem limiti hem yığılma noktası vardır ve bu ikisi çakışırlar.

İSPAT: Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = a \in X$ koşulunu sağlayan (x_n) sabit dizisi verilsin. $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayı içinde her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = a \in X$ koşulunu sağlayan (x_n) sabit dizisini düşünelim. a noktasının her W komşuluğu $x_n = a$ terimlerini içerdiğinden, `Tanım` 11.1.2 gereğince, $x_n \to a$ dır; yani (x_n) dizisinin limiti a dır.

Her limit noktası bir yığılma noktası olduğundan a noktası sözkonusu sabit dizinin bir yığılma noktasıdır.

Örnek 11.1.2. $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak topolojiye göre $(\frac{1}{n})$ dizisinin limiti 0 dır ve 0 noktası bu dizinin bir yığılma noktasıdır.

İSPAT: Arşimet Kuralı uyarınca, her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık $\epsilon > \frac{1}{n_0}$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. O halde $n \geq n_0$ için

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \epsilon$$

olur. Açık aralıklar ailesi salt topoloji için taban olduğundan, 0 noktasının bir W komşuluğu için, $\epsilon > 0$ sayısını $(-\epsilon, \epsilon) \subset W$ olacak biçimde seçebiliriz. Bu durumda

$$n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} \in (-\epsilon, \epsilon) \subset W$$

olacaktır. Her W komşuluğu için bu yapılabileceğine göre $\dfrac{1}{n} \to 0$ olduğu sonucu çıkar.

Öte yandan $\epsilon > 0$ ne kadar küçük olursa olsun, 0 dan farklı olan $\frac{1}{n}$ terimleri `Tanım` 11.1.3 özeliğini sağlarlar. Öyleyse 0 noktası $(\frac{1}{n}) \subset \mathbb{R}$ alt kümesinin bir yığılma noktasıdır.

Örnek 11.1.3. $\mathbb{R}$ üzerindeki salt topolojiye göre $((-1)^n)$ dizisi yakınsak değildir ama -1 ve $+1$ noktaları yığılma noktalarıdır.

Olmayana ergi yöntemini kullanacağız. Dizinin bir x limitinin olduğunu varsayalım. Bu durumda ya $x \neq 1$ dir ya da $x \neq -1$ dir. $x \neq 1$ olduğunu kabul edilim ($x \neq -1$ hali için de benzer işlem yapılır).

$1 \notin (x-\delta, x+\delta)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı seçebiliriz, kabulümüze göre, dizi yakınsak olduğu için, belli bir $n_o \in \mathbb{N}$ için

$$n \geq n_0 \Rightarrow (-1)^n \in (x-\delta, x+\delta)$$

olmalıdır. Oysa n çift bir sayı olduğunda bu bağıntı sağlanmaz; demek ki varsayımımız yanlıştır; yani dizi hiçbir x limitine yakınsamaz.

-1 sayısının her komşuluğu dizinin tek indisli terimlerini içerir. Bu terimler sonsuz sayıdadır. Öyleyse, *Tanım:* 11.1.3 uyarınca -1 noktası dizinin bir yığılma noktasıdır. Benzer olarak, $+1$ sayısının her komşuluğu dizinin çift indisli terimlerini içerir. Bu terimler sonsuz sayıdadır. O halde, $+1$ noktası dizinin bir yığılma noktasıdır.

Örnek 11.1.4. $\mathbb{R}$ üzerindeki salt topolojiye göre $((-1)^n + \frac{1}{n})$ dizisinin limiti yoktur. Ancak -1 ile $+1$ noktaları bu dizinin yığılma noktalarıdır.

İSPAT: Bunun kolay ispatı öğrenciye bırakılmıştır.
Böylece aşağıdaki özellikleri elde etmiş oluyoruz.

SONUÇLAR:

(i) Dizinin bir limiti varsa, o limit aynı zamanda bir yığılma noktasıdır. Bu durumda, limit noktası ile yığılma noktası çakışır. (bkz. Örnek 11.1.2)

(ii) Dizinin yığılma noktasının olması, o dizinin limit noktasının da olmasını gerektirmez (bkz. 11.1.4).

(iii) Dizinin hem limiti hem de yığılma noktası olmayabilir. (Örnek: $f : n \to n^2$)

(iv) Dizinin limiti olmadığı halde yığılma noktaları olabilir (bkz. Örnek 11.1.4)

11.2 DİZİLERİN YETERSİZLİĞİ

Önerme 11.2.1. $(X, \mathscr{T})$ *Birinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlayan bir uzay olsun ve bir* $A \subset X$ *alt-kümesi verilsin.* $a \in \bar{A}$ *olması için gerekli ve yeterli koşul,* a *noktasına yakınsayan bir* $(a_n) \subset A$ *dizisinin varlığıdır.*

İ s p a t: $a \in \bar{A}$ olsun. a nın sayılabilir ve iç-içe bir

$$V_1 \supset V_2 \supset \cdots V_n \supset \cdots$$

komşuluklar tabanı vardır. (bkz. `Önerme` 5.1.2). a noktası A kümesinin bir *yığılma noktası* olduğundan, her n için $V_n \cap A \neq \emptyset$ dir; dolayısıyla bir $a_n \in V_n \cap A$ seçebiliriz. Böylece, oluşan (a_n) dizisinin a ya yakınsadığı görülür.

Tersine olarak $a_n \to a$ olacak şekilde bir $(a_n) \subset A$ dizisi verilsin. Yakınsaklık tanımı gereğince, a nın her W komşuluğu belli bir n_0 dan büyük indisli a_n terimlerini içerecektir; yani $a_n \in W \cap A$ olacaktır, ki bu $a \in \bar{A}$ olması demektir (bkz. `Önerme:` 2.5.3).

Tanım 11.2.1. Bir $f(X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ verilsin. Eğer her $(x_n) \subset X$ dizisi için

$$x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$$

oluyorsa f fonksiyonuna x noktasında *dizisel süreklidir*, denilir.

Teorem 11.2.1. *Sürekli her fonksiyon dizisel süreklidir; ama dizisel sürekli bir fonksiyonun sürekli olması gerekmez.*

İ S P A T: $f(X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ fonksiyonu $a \in X$ noktasında sürekli olsun ve $a_n \to a$ olacak şekilde bir $(a_n) \subset X$ dizisi alalım. $(Y, \mathscr{S})$ topolojisine göre, $f(a)$ nın her W komşuluğu için

$$n \geq n_0 \Rightarrow f(a_n) \in W$$

olacak şekilde bir n_0 doğal sayısının varlığını göstermeliyiz, f fonksiyonu sürekli olduğundan $V = f^{-1}(W)$ kümesi a nın bir komşuluğudur (bkz. `Teorem` 6.1.1(d)). Oysa $a_n \to a$ olduğundan öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki $n \geq n_0$ olduğunda $a_n \in V$ olacaktır, ki bu durumda $f(a_n) \in W$ olur ve istenen (11.2) özelliği elde edilir.

Teoremin ikinci kısmını göstermek için, dizisel sürekli olduğu halde sürekli olmayan bir fonksiyon tanımlamak yetecektir. Bunun için $X = \mathbb{R}$ alalım ve $\mathscr{T}$ topolojisi olarak, $\emptyset$ ile sayılabilir kümelerin tümleyenlerini alalım. Bu durumda bir $(a_n) \subset \mathbb{R}$ dizisinin, $\mathscr{T}$ ya göre, a ya yakınsaması için belli bir k dan sonra $a_n = a$ olması, yani dizinin

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_k, \ a, a, a, \cdots\}$$

şeklinde olması gerekli ve yeterlidir. Her

$$f : (\mathbb{R}, \mathscr{T}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{R})$$

fonksiyonunun dizisel sürekli olduğu kolayca görülür.

Oysa, örneğin, $f^{-1}[(0,1)] = (0,1)$ kümesi $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ uzayında açık olmadığı için $f(x) = x$ diye tanımlanan özdeşlik fonksiyonu $\mathscr{T} - \mathscr{R}$ sürekli değildir.

Teorem 11.2.2. *Bir $(X, \mathscr{T})$ uzayı Birinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlayan bir uzay ve $(Y, \mathscr{S})$ her hangi bir uzay olmak üzere*

$$f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$$

fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki özelikler eşdeğerdir:

(i) f fonksiyonu bir $a \in X$ noktasında süreklidir;

(ii) f fonksiyonu bir $a \in X$ noktasında dizisel süreklidir.

İ s p a t: Genel olarak $(i) \Rightarrow (ii)$ olduğunu `Teorem` 11.2.1 den biliyoruz. O halde $(ii) \Rightarrow (i)$ olduğunu göstermek yetecektir. Bunu olmayana ergi yöntemi ile göstereceğiz. a noktasının iç-içe bir $V_1 \supset V_2 \supset \cdots$ sayılabilir komşuluklar tabanını alalım ve f fonksiyonunun a noktasında sürekli olmadığını varsayalım. Bu durumda öyle bir $S \in \mathscr{S}$ vardır ki $f(a) \in S$ dir ama her $n \in \mathbb{N}$ için $V_n \notin f^{-1}(S)$ olur. Öyleyse

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } (\exists a_n \in V_n)\; a_n \notin f^{-1}(S) \tag{11.3}$$

dir, ki bu $f(a_n) \notin S$ olmasını gerektirir. Şimdi (11.3) özeliğine sahip olacak şekilde seçilen (a_n) dizisinin a ya yakınsadığı apaçıktır; oysa $(f(a_n))$ dizisi $f(a)$ ya yakınsamıyor; ki bu f nin dizisel sürekli olmasına aykırıdır. Yani f sürekli değilse f dizisel sürekli olmuyor. Oysa varsayımımız gereğince f dizisel süreklidir. Demek ki f nin sürekli olmadığı kabulümüz yanlıştır.

Yukarıdaki iki teoremden çıkan sonuç şudur:

Sonuç 11.2.1. *Her hangi bir topolojik uzayda dizisel süreklilik ile süreklilik eşdeğer olmadığı halde, Birinci Sayılabilme Aksiyomu sağlayan uzaylarda bu iki kavram eşdeğerdir.*

Dizilerle süreklilik arasındaki bu ilişkilerin başka topolojik özellikler için de var olup olmadığı sorulabilir. Daha genel söylersek, `Tanım` 11.1.2 ile verilen yakınsama kavramı bir topolojik yapı tanımlamaya yetebilir mi? (Örneğin kaplama aksiyomlarının yettiği gibi). Bu sorunun yanıtı Birinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlayan uzaylar için *"evet"* tir. Daha açık bir deyişle, Birinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlayan uzaylarda açık (ya da kapalı) kümeleri, dizilerin yakınsaklığı kavramı ile belirtmek mümkündür. Bunun için aşağıdaki özeliği ispatlamak yetecektir.

Teorem 11.2.3. $(X, \mathscr{T})$ *Birinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlayan her uzay aşağıdaki özeliklere sahiptir:*

(i) $T \in \mathscr{T} \Leftrightarrow x_n \to x \in T$ ise (x_n) dizisinin belli bir sayıdan büyük indisli terimleri T ye aittir;

(ii) $F \in \mathscr{T}' \Leftrightarrow \{\ [\ (x_n) \subset F$ ve $x_n \to x] \Rightarrow x \in F\}$

İ S P A T:

(i): $\Rightarrow$: $T \in \mathscr{T}$ ve $x_n \to x \in \mathscr{T}$ olsun. T kümesi, x noktasının bir komşuluğu olduğundan, `Tanım` 11.1.2 gereğince, öyle bir n_0 doğal sayısı vardır ki

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in T$$

olur.

$\Leftarrow$: $T = T^o$ olduğunu göstermek için olmayana ergi yöntemini kullanacağız. Eğer $T \neq T^o$ olsaydı, $x \notin T^o$ ve $x \in T$ olan bir x öğesi olacaktı. Bu noktanın sayılabilir bir komşuluklar tabanı tabanı $V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_n \supset \ldots$ olsun. $x \notin T^o$ demek, her n için $V_n \cap T' \neq \emptyset$ demektir. Öyleyse her bir $V_n \cap T'$ kümesinden bir x_n öğesi seçerek bir

$$x_n \to x,\ (x_n) \subset T'$$

dizisi oluşturabiliriz. Bu dizinin varsayımımızı sağladığı apaçıktır; O halde kabulümüz yanlıştır; yani $T = T^o$ dır.

(ii): $\Rightarrow$: F kapalı bir alt-küme olsun ve $x_n \to x$ olan bir $(x_n) \subset F$ dizisi verilsin. $x \in F$ olacağını göstereceğiz. Olmayana ergi yöntemini kullanacağız. $x \in F' \in \mathscr{T}$ olsaydı, öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varolacaktı ki

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in F'$$

sağlanacaktı. Oysa bu $(x_n) \subset F$ olmasına aykırıdır. O halde kabulümüz yanlıştır; yani $x \in F$ dir.

$\Leftarrow$: (bkz. `Önerme` 11.2.1) .

Bu söylediklerimizden çıkan sonuç şudur:

Sonuç 11.2.2. *[Dizilerin yetersizliği] Dizilerin yakınsaklığı kavramı, ancak, Birinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlayan uzaylarda açık (kapalı) kümeleri belirlemeye yetmektedir.*

Başka bir deyişle, bir küme üzerinde `Teorem` 11.2.3(i) özeliğini açık kümelerin tanımı olarak alırsak, ancak, Birinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlayan bir topolojik yapı kurabiliriz.

Ama, bütün topolojik uzaylar Birinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlamadığına göre, dizilerin yakınsaklığı kavramı topolojik yapıların kurulmasında yetersiz kalmaktadır. Bunun için dizi kavramını, bu amaca yetecek yeni kavramlara genelleştirmek gerekmiştir. Bu yeni kavramları bundan sonraki kesimlerde inceleyeceğiz.

11.3 PROBLEMLER

1. Ayrık olmayan bir uzaydaki her dizinin, uzayın her noktasına yakınsadığını gösteriniz.

2. Ayrık bir uzayda bir (a_n) dizisinin bir a noktasına yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul belli bir indisten sonraki bütün a_n terimlerinin a ya eşit olmasıdır.Gösteriniz.

3. Sonsuz bir X kümesi üzerinde $\mathscr{T}$ topolojosi olarak boş küme ile sayılabilir bütün alt-kümelerin tümleyenlerini alalım. Bir (a_n) dizisinin bir a limitine yakınsaması için, belli bir indisten sonraki bütün a_n terimlerinin a ya eşit olması gerekli ve yeterlidir. Gösteriniz.

4. `Tanım` 11.1.2 de komşuluklar ailesi yerine yerel tabanın konulabileceğini gösteriniz.

5. *Birinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağlayan bir topolojik uzayda bir (x_n) dizisi verilsin. Bir x noktasının bu dizinin bir yığılma noktası olması için gerekli ve yeterli koşul, verilen dizinin x noktasına yakınsayan bir alt dizisinin varlığıdır. Gösteriniz.

6. Gerçel sayılardan oluşan bir (x_n) dizisinin, salt topolojiye göre, bir x sayısına yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul, her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık
$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \epsilon$$
olacak biçimde doğal bir n_0 sayısının varlığıdır. Gösteriniz.

7. Genel terimi yinelgen (recursive) olarak ($a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$) biçiminde tanımlanan *Fibonacci* dizisinin salt topolojiye göre ıraksayan bir dizi olduğunu gösteriniz.

8. Yakınsak bir dizinin her alt dizisinin de yakınsak ve aynı limite sahip olduğunu gösteriniz.

9. Aşağıdaki dizilerin herbirisinin, varsa, (salt topolojiye göre) limit ve yığılma noktalarını bulunuz:

   (a) Her $n \in \mathbb{N}$ için ($a_n = 3$) diye tanımlanan (a_n) sabit dizisi.

   (b) Belli bir n_0 indisinden sonra terimleri sabit olan dizi; yani
   $$a_n = \begin{cases} n, & n \leq n_0 \\ a, & n > n_0,\ a \quad \text{sabit} \end{cases} \tag{11.4}$$
   biçiminde tanımlanan (a_n) dizisi.

   (c) Genel terimi $a_n = 5 - \frac{5}{n}$ olan (a_n) dizisi.

   (d) Genel terimi $a_n = 7 + \frac{7}{n}$ olan (a_n) dizisi.

   (e) Genel terimi $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ olan (a_n) dizisi.

   (f) Genel terimi $a_n = n$ olan (a_n) dizisi.

   (g) Genel terimi $a_n \equiv n \pmod 3$ olan (a_n) dizisi.

   (h) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ fonksiyonu $f(n) = \frac{1}{n}$ diye tanımlanan bire-bir-içine bir fonksiyon olmak üzere, $a_n = f(n)$ dizisi. [Böyle bir fonksiyonun varlığını gösteriniz.]

10. Her gerçel sayının rasyonel sayılar kümesinin bir yığılma noktası olduğunu; yani her $x \in \mathbb{R}$ için $x \in \tilde{\mathbb{Q}}$ olduğunu gösteriniz.

11. $\mathbb{R}$ üzerindeki salt topolojiye göre $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin hiç bir yığılma noktası olmadığını gösteriniz.

12. $\mathbb{R}$ üzerindeki salt topolojiye göre $S = (0, 1) \cup \{3\}$ kümesinin yığılma noktalarını bulunuz.

13. Ayrık olmayan uzayda her nokta boş olmayan her kümenin bir yığılma noktasıdır. Gösteriniz.

14. Ayrık uzayda hiç bir kümenin yığılma noktasıdır. Gösteriniz.