Bölüm 9

ÇARPIM UZAYLARI

9.1 ÇARPIM TOPOLOJİSİ

Boş olmayan kümelerden oluşan boş olmayan bir ailenin kartezyen çarpımının da boş olmadığını, Seçme Aksiyomu [13],[20], [8] ile kabul ediyoruz. Şimdi verilen aileye ait her küme üzerinde bir topolojik yapı olduğunu varsayalım. Bu topolojik yapılara dayalı olarak, verilen ailenin kartezyen çarpımı üzerinde çok kullanışlı bir topoloji tanımlayacağız. Adına, verilen topolojilerin *çarpım topolojisi* diyeceğimiz bu topolojik yapıyı en genel biçimiyle tanımlamak hiç de zor değildir. Ancak bu genel tanımı vermeden önce, öğrenciyi konuya hazırlamak amacıyla, yapılacak işin özünü yalın bir örnekle açıklayalım:

$(X, \mathscr{T})$ ile $(Y, \mathscr{S})$ iki topolojik uzay olsun. X ve Y kümelerinin kartezyen çarpımını Z ile gösterelim; yani $Z = X \times Y$ olsun. Şimdi T açık kümesi $\mathscr{T}$ topolojisinden ve S açık kümesi de $\mathscr{S}$ topolojisinden seçilmek üzere $T \times Y$ biçimindeki bütün kümelerle $X \times S$ biçimindeki bütün kümelerin oluşturduğu aileye $\mathfrak{S}$ diyelim; yani

$$\mathfrak{S} = \{T \times Y,\ X \times S \mid T \in \mathscr{T},\ S \in \mathscr{S}\} \tag{9.1}$$

olsun. Kolayca görüleceği gibi $\mathfrak{S}$ ailesine ait kümelerin bileşimi Z kartezyen çarpımına eşittir. Öyleyse, `Önerme` 4.1.7 gereğince $\mathfrak{S}$ ailesinin $\mathscr{B}$ ile göstereceğimiz sonlu arakesitleri ailesi Z üzerinde bir topoloji üretir. Bu topolojiyi $\mathscr{P}$ ile gösterelim Bu durumda, $\mathfrak{S}$ ailesi $\mathscr{P}$ topolojisinin bir alt-tabanı ve $\mathscr{B}$ ailesi da bir tabanıdır. İşte, bu şekilde belirlenen $\mathscr{P}$ topolojisine $\mathscr{T}$ ile $\mathscr{S}$ nin *çarpım topolojisi* diyoruz. Kolayca görüleceği gibi $\mathscr{B}$ tabanı, $\mathscr{T}$ ve $\mathscr{S}$ topolojilerine ait kümelerin, karşılıklı olarak, kartezyen çarpımlarından oluşan ailedir; yani

$$\mathscr{B} = \{T \times S \,|\, T \in \mathscr{T},\ S \in \mathscr{S}\} \tag{9.2}$$

dir. Buradan hemen, `Önerme` 2.3.1 ye göre, şunu söyleyebiliriz:

Önerme 9.1.1. *Yukarıdaki kavramlar altında, bir $W \subset X \times Y$ alt-kümesinin çarpım uzayda açık olması için gerekli ve yeterli koşul, her $(x, y) \in W$ için $T \times S \subset W$ ve $x \in T$, $y \in S$ olacak şekilde bir $T \in \mathscr{T}$ ile bir $S \in \mathscr{S}$ kümesinin var olmasıdır.*

Şimdi, genel tanıma geçebilmek amacıyla, çarpım topolojisinin (9.1) ile verilen alt-tabanını izdüşüm fonksiyonları yardımıyla belirleyelim:

$Z = X \times Y$ kartezyen çarpımından X bileşeni üzerine olan izdüşümü π_1 ile, Y bileşeni üzerine olan izdüşümü π_2 ile gösterelim. Her $T \in \mathscr{T}$ için $T \times Y = \pi_1^{-1}(T)$ ve her $S \in \mathscr{S}$ için $X \times S = \pi_2^{-1}(S)$ dir. Öyleyse (9.1) den

$$\mathfrak{S} = \{\pi_1^{-1}(T), \pi_2^{-1}(S) \quad | \quad T \in \mathscr{T}, S \in \mathscr{S}\} \tag{9.3}$$

yazabiliriz. Yani, çarpan uzaylardaki açık kümelerin izdüşüm fonksiyonları altındaki ters resimleri, çarpım uzayda açık birer kümedir. Bu, izdüşüm fonksiyonlarının sürekli olması demektir. Bununla da yetinmeyip, (9.3) ile verilen alt-tabanın `Önerme` 8.1 yi sağladığını görerek, çarpım topolojisinin izdüşüm fonksiyonlarını sürekli kılan en kaba topoloji olduğunu söyleyebiliriz. Başka bir deyişle, $\mathscr{P}$ çarpım topolojisi, $\mathscr{T}$ ile $\mathscr{S}$ topolojilerinin π_1 ve π_2 izdüşüm fonksiyonlarına göre *izdüşel topoloji*sidir. [14], [20], [12], [11]

(9.3) ile verilen alt-tabanın sonlu arakesitlerlinden oluşacak tabanının (9.2) ye eşit olduğu hemen görülebilir. $\mathscr{B}$ tabanına ait her hangi bir $T \times S$ kümesi için

$$\pi_1(T \times S) = T \quad \text{ve} \quad \pi_2(T \times S) = S$$

dir; yani izdüşüm fonksiyonları, çarpım topolojisinin tabanına ait kümeleri açık kümelere resmediyorlar. O halde, `Önerme` 6.3.3 gereğince, izdüşüm fonksiyonları birer açık dönüşümdür.

Artık, her hangi bir topolojik uzaylar ailesinin çarpım uzayını tanımlayabiliriz:

Tanım 9.1.1. Bir

$$\{(X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \tag{9.4}$$

topolojik uzaylar ailesi verilsin,

$$X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \tag{9.5}$$

kartezyen çarpımından X_λ bileşeni üzerine olan izdüşümü π_λ ile gösterelim.

Verilen topolojilerin, izdüşüm fonksiyonlarına göre, izdüşel topolojisine bu topolojilerin çarpımı diyecek ve bunu $\mathscr{P}$ ile göstereceğiz. Bu durumda, $(X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda)$ uzaylarının herbirine bir *çarpan uzay* ya da bileşen uzay; $(X, \mathscr{P})$ ye de *çarpım uzay* denilir.

İzdüşel topoloji tanımına göre, $\mathscr{P}$ çarpım topolojisi, izdüşüm fonksiyonlarını sürekli kılan en kaba topolojidir.

`Önerme` 8.1.1 ye göre, $\mathscr{P}$ çarpım topolojisinin bir alt-tabanı

$$\mathfrak{S} = \{A \quad | \quad (\exists \lambda \in \Lambda)(\exists T \in \mathscr{T}_\lambda)\ A = \pi_\lambda^{-1}(T)\} \tag{9.6}$$

dır. Tabii, buradaki A kümelerinin nasıl olduklarını görmek kolaydır. $\lambda_i \in \Lambda$ ve $T_i \in \mathscr{T}_i$ olmak üzere, $A_i = \pi_i^{-1}(T_i)$ ise, M_λ $(\lambda \in \Lambda)$ kümelerini

$$M_\lambda = \begin{cases} X_\lambda, & \lambda \neq \lambda_i \\ T_i, & \lambda = \lambda_i \end{cases} \tag{9.7}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda A_i kümesinin

$$A_i = \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \tag{9.8}$$

şeklinde olacağı, hemen izdüşüm fonksiyonu tanımından çıkar.

Şimdi de $\mathscr{P}$ çarpım topolojisinin $\mathfrak{S}$ alt-tabanının sonlu arakesitlerinden oluşan $\mathscr{B}$ doğal tabanını düşünelim. Her $B \in \mathscr{B}$ kümesine karşılık öyle sonlu tane $A_i \in \mathfrak{S}(i = 1, 2, \ldots, m)$ kümesi vardır ki

$$B = \cap_{i=1}^{n} A_i$$

olur. (9.8) den kolayca görüleceği gibi,

$$N_\lambda = \begin{cases} X_\lambda, & \lambda \neq \lambda_i, (1 \leq i \leq m) \\ T_i, & \lambda = \lambda_i, (1 \leq i \leq m) \end{cases} \tag{9.9}$$

olmak üzere, B kümesi

$$B = \Pi N_\lambda, \ (\lambda \in \Lambda) \tag{9.10}$$

biçimindedir; yani çarpan kümelerinin ancak sonlu tanesi çarpan uzaylardan farklı açık kümeler olmaktadır. Hemen buradan önemli bir özeliği söyleyebiliriz. Her $\lambda \in \Lambda$ için, (9.10) dan

$$\pi_\lambda(B) = N_\lambda$$

olduğu izdüşüm tanımından çıkar. Öte yandan, (9.9) gereğince N_λ kümesi $\mathscr{T}_\lambda$ ya ait açık bir kümedir. Tabana ait her B kümesi ve her π_λ izdüşümü için bu özelik vardır; yani izdüşüm fonksiyonları tabana ait kümeleri açık kümelere resmederler. Öyleyse, `Önerme` 6.3.3 ye göre şu sonucu söyleyebiliriz:

Önerme 9.1.2. *Bir çarpım uzaydan çarpan uzaylara tanımlanan izdüşüm fonksiyonları açık birer dönüşümdür.*

Ancak, izdüşüm fonksiyonları kapalı birer dönüşüm değildir. (bkz. `Örnek` 6.3.1).

Uyarı 9.1.1. $\mathscr{P}$ çarpım topolojisinin (9.6) ile verilen $\mathfrak{S}$ alt-tabanı yerine aşağıdaki iki tabanı daha tanımlayabiliriz.

Çarpım tanımındaki gösterimleri varsayalım. Sonra her $\lambda \in \Lambda$ için $\mathscr{T}_\lambda$ topolojisinin bir $\mathscr{B}_\lambda$ tabanı ile bir $\mathfrak{S}_\lambda$ alt-tabanının verildiğini düşünelim. Bu durumda tabanlara ait kümelerin izdüşüm fonksiyonları altındaki ters resimlerine $\mathfrak{b}$ ve alt-tabanlara ait kümelerin ters resimlerine de $\mathfrak{s}$ diyelim; yani

$$\mathfrak{b} = \{A | (\exists \lambda \in \Lambda) \ (\exists B \in \mathscr{B}_\lambda) \ A = \pi_\lambda^{-1}(B)\} \tag{9.11}$$

$$\mathfrak{s} = \{A | (\exists \lambda \in \Lambda) \ (\exists S \in \mathfrak{S}_\lambda) A = \pi_\lambda^{-1}(S)\} \tag{9.12}$$

olsun. `Önerme` 8.1.2 ile `Önerme` 8.1.3 uyarınca, bu iki ailenin $\mathscr{P}$ çarpım topolojisine birer alt-taban olacakları apaçıktır.

Örnek 9.1.1. Düzlem üzerindeki salt (mutlak) topoloji, gerçel eksen üzerindeki salt topolojinin kendisiyle çapımına eşittir.

Yapılacak işi geometrik olarak temsil edebilmek için, düzlemde dikey bir koordinat sistemi seçelim. Yatay ve düşey eksenlerin her ikisinde de gerçel eksen üzerindeki salt topoloji var olsun. $(\mathbb{R}, \mathscr{R})$ uzayının kendisiyle çarpımını oluşturacağız. $\mathscr{R}$ salt topolojisinin bir tabanı, $\mathbb{R}$ üzerindeki bütün açık aralıklardır.

Yatay eksen üzerindeki her (a, b) açık aralığının π_1 izdüşümü altındaki ters resmi (a, b) aralığından geçen düşey ve açık A_1 şerididir. Benzer olarak, düşey eksen üzerindeki her (c, d) açık aralığının π_2 izdüşümü altındaki ters resmi (c, d) aralığından geçen yatay ve açık A_2 şerididir (Şekil çiziniz). O halde, bu örnek için, $\mathscr{P}$ çarpım topolojisinin (9.11) ile tanımlanan alt-tabanı, düzlemdeki düşey ve yatay bütün açık şeritler ailesidir. Oysa bu aile, düzlemdeki salt topolojinin bir alt-tabanı idi (bkz. Örnek 4.1.4). Alt-tabanları aynı olan iki topoloji eşit olacağından, istenen şey çıkmış olur.

Örnek 9.1.2. $\mathbb{R}^n \quad (1 \leq n < \infty)$ Öklid uzayı n tane $(\mathbb{R}, \mathscr{R})$ uzayının çarpımına eşittir.

$R_i = \mathbb{R} \quad (1 \leq i \leq n)$ olmak üzere

$$\mathbb{R}^n = R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n$$

yazalım. R_i üzerindeki bir (a_i, b_i) açık aralığının π_i izdüşümü altındaki ters resmi, bu aralık üzerine kurulan

$$A_i = R_1 \times \ldots \times R_{i-1} \times (a_i, b_i) \times R_{i+1} \times \ldots \times R_n$$

silindiridir. Bu silindirler ailesi n-boyutlu Öklid uzayının bir alt-tabanıdır. Tabii bunların sonlu arakesitleri ailesi

$$A = \Pi_{i=1}^{n}(a_i, b_i), \quad -\infty \leq ai \leq bi \leq +\infty \tag{9.13}$$

biçimindeki sınırlı ya da sınırsız bütün n-boyutlu hücreleri oluşturacaktır, ki bu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayının bir topoloji tabanıdır.

Uyarı 9.1.2. $\{(X_i, \mathscr{T}_i) : 1 \leq i \leq n\}$ topolojik uzaylarının $(X, \mathscr{P})$ çarpım uzayını düşünelim. (9.10) uyarınca, $\mathscr{P}$ topolojisinin bir tabanı

$$\mathscr{B} = \{T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_n \mid T_i \in \mathscr{T}_i, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

ailesidir.

Tabii buradaki T_i açık kümelerinin hepsi ya da bazısı tüm X_i uzaylarından farklı açık kümeler olabilir. Üstelik, çarpım uzayına ait her açık küme, daima çarpan uzaylara ait açık kümelerin bir kartezyen çarpımı biçiminde olmayabilir. Örneğin, düzlemde açık bir disk $\mathbb{R}^2$ uzayında açıktır. Ama bu disk çarpan uzaylara ait iki açık kümenin kartezyen çarpımı olarak yazılamaz. Bu da gösteriyor ki bir çarpım uzaydaki açık kümeler, çarpım uzayın tabanına ait kümelerin biçiminden çok farklı olabilirler.

Uyarı 9.1.3. Bununla ilgili bir uyarı daha yapmak yararlı olacaktır. Sonsuz tane uzayın çarpım uzayında, çarpan uzaylara ait açık kümelerin sonsuz kartezyen çarpımı açık bir küme olmayabilir (bkz. 6.Problem).

Tanım 9.1.2. Bir Z kümesinden (9.5) ile verilen X çarpım kümesine bir g fonksiyonu verilmiş olsun. $z \in Z$ için $g(z) = x = (\times_\lambda) \in X$ ise,

$$\pi_\lambda \circ g(z) = x_\lambda \ (\lambda \in \Lambda) \tag{9.14}$$

$$\pi_\lambda \circ g = g_\lambda \tag{9.15}$$

diyelim.

Önerme 9.1.3. *g dönüşümü, Z den X_λ bileşenlerine tanımlı olan $\{g_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ dönüşümlerini tek olarak belirler. Tersine olarak, her $\lambda \in \Lambda$ için Z den X_λ ya bir g_λ fonksiyonu verilmişse*

$$g(z) = (g_\lambda(z))_{\lambda \in \Lambda} \tag{9.16}$$

bağıntısı Z den X çarpımına bir g fonksiyonu tanımlar ve bu $\pi_\lambda \circ g = g_\lambda$ eşitliğini sağlar.

Demek ki bir Z kümesinden X çarpım kümesine bir g fonksiyonunun tanımlı olması için gerekli ve yeterli koşul, Z den X_λ bileşenlerine $\pi_\lambda \circ g = g_\lambda$ fonksiyonlarının tanımlı olmasıdır. Buradan, işlemlerde basitlik sağlamak amacıyla, şu gösterimi tanımlayabiliriz: $g = (g_\lambda)$. Bu durumda, g_λ fonksiyonlarına g fonksiyonunun bileşenleri diyeceğiz. Artık g fonksiyonunun süreklilik özeliğine geçebiliriz.

Önerme 9.1.4. *Bir $(Z, \mathscr{O})$ uzayından $(X, \mathscr{P})$ çarpım uzayına verilen bir $g = (g_\lambda)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, her $\lambda \in \Lambda$ için g_λ bileşeninin sürekli olmasıdır.*

İ S P A T: $g_\lambda = \pi_\lambda \circ g$ fonksiyonlarına, `Önerme` 8.1.4 yi uygulamak yetecektir.

Bu önermenin bir uygulaması olarak, bir fonksiyonun grafiği ile sürekliliği arasındaki ilişkiyi inceleyebiliriz. Bir $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ fonksiyonu verilsin. Bu iki uzayın çarpımını $(W, \mathscr{P})$ ile ve f fonksiyonunun grafiğini G ile gösterelim. $G \subset W = X \times Y$ olduğundan, $\mathscr{P}$ topolojisinin G üzerine kondurduğu $\mathscr{P}_G$ topolojisinden sözedebiliriz; yani $(G, \mathscr{P}_G)$, çarpım uzayın bir alt-uzayıdır. Şimdi X kümesinden G grafiği üzerine, her $x \in X$ için

$$g(x) = (x, f(x)) \tag{9.17}$$

diye bir g fonksiyonu tanımlayalım. G grafiğinin

$$G = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

olduğu anımsanırsa, (9.16) ten g fonksiyonunun X kümesinden G üzerine bir fonksiyon olduğu görülür. Öte yandan $g(x_1) = g(x_2)$ ise $(x_1, f(x_1)) = (x_2, f(x_2))$ olacaktır ki bu $x_1 = x_2$ olması demektir; yani g fonksiyonu bire-birdir. Böylece g fonksiyonunun bire-bir-örten olduğu ortaya çıkar. Ayrıca (9.16) gösterimini kullanmak için, g fonksiyonunun bileşenlerini (9.11) bağıntısından bulabiliriz. Gerçekten $g = (g_1, g_2)$ dersek (9.17) dan

$$g_1(x) = \pi_1 \circ g(x) = x \tag{9.18}$$

$$g_2(x) = \pi_2 \circ g(x) = f(x) \tag{9.19}$$

çıkar); yani I fonksiyonu X kümesinin özdeşlik dönüşümü olmak üzere, $g_1 = I$ ve $g_2 = f$ olur. O halde

$$g = (I, f) \tag{9.20}$$

yazabiliriz. Şimdi önermemizi söyleyelim:

Önerme 9.1.5. *Bir $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ fonksiyonunun sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, (9.17) ile tanımlanan $g : (X, \mathscr{T}) \to (G, \mathscr{P}_G)$ fonksiyonunun bir topolojik eşyapı resmi olmasıdır.*

İ S P A T: g bir eşyapı resmi olsun. g sürekli olduğundan, `Önerme` 9.1.4 ye göre, g fonksiyonunun bileşenleri de sürekli olacaktır. Bu, (9.20) gereğince, f fonksiyonunun sürekli olmasını gerektirir.

Tersine olarak, f sürekli olsun. `Önerme` 9.1.4 uyarınca, g fonksiyonunun sürekli olduğu (9.20) den çıkar. g bire-bir ve örten olduğundan g^{-1} ters fonksiyonu tanımlıdır. Üstelik bu ters fonksiyon $X \times Y$ çarpımından X üzerine olan π_1 izdüşümünün G ye kısıtından başka birşey değildir; dolayısıyla, süreklidir (bkz. `Teorem` 8.1.4). Böylece, g fonksiyonunun bir topolojik eşyapı resmi olduğu ortaya çıkar.

Bu önermeyi, kısaca, şöyle de söyleyebiliriz; Bir fonksiyonun sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, kalkış uzayı ile grafiğinin topolojik eşyapılı olmasıdır.

Önerme 9.1.6. *$(X, \mathscr{T})$ ile $(Y, \mathscr{S})$ uzaylalrı verilsin. Sabit bir $x \in X$ seçelim. $\{x\} \times Y$ alt-kümesi üzerinde $\mathscr{P}$ çarpım topolojisinin kondurduğu topoloji varolsun. Bu durumda, Y uzayından çarpım uzayın $\{x\} \times Y$ alt-uzayına tanımlanan $h_x : y \rightarrow (x, y)$ fonksiyonu bir eşyapı dönüşümüdür.*

İ S P A T: h_x fonksiyonunun BBÖ olduğu apaçıktır. Her $y \in Y$ için $\pi_1 \circ h_x(y) = x$ olduğundan $\pi_1 \circ h_x$ bileşkesi Y uzayından X uzayına tanımlı sabit bir fonksiyondur; yani süreklidir. $\pi_2 \circ h_x$ bileşkesi ise Y uzayı üzerindeki özdeşlik dönüşümüdür; yani süreklidir. Bileşenleri sürekli olduğundan h_x fonksiyonunun tersi π_2 izdüşümünün $\{x\} \times Y$ alt-kümesine kısıtlanmışından başka bir şey değildir; O halde o da süreklidir. [3], [7], [9], [19]

9.2 KARMA PROBLEMLER

1. A ile B, sırasıyla, X ile Y topolojik uzaylarının birer alt-kümesi olsunlar.

   (a) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$

   (b) $\overline{(A \times B)} = \bar{A} \times \bar{B}$

   (c) $\partial(A \times B) = (\partial A \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times \partial B)$

   olduğunu gösteriniz.

2. X bir topolojik uzay ise $X \times X$ çarpım uzayında

   $$\Delta = \{(x, x) | x \in X\}$$

   köşegeninin X uzayına eşyapılı olduğunu gösteriniz.

3. Bir $\{X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ topolojik uzaylar ailesi verilsin ve bunların çarpım uzayı $(X, \mathscr{P})$ olsun.

   (a) Eğer Λ sonlu yada sayılabilir sonsuz bir küme ise, çarpım uzayın *Birinci (ya da İkinci) Sayılabilme Aksiyomunu* sağlayabilmesi için gerekli ve yeterli koşul, çarpan uzaylardan herbirisinin de bu aksiyomu sağlamasıdır.

   (b) Λ damgalayan kümesi sayılamaz sonsuz bir küme olsun. Çarpan uzayların herbirisinin *Birinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağladığını varsayalım. Bu durumda, eğer çarpan uzayların sayılamaz sayıdası enaz ikişer öğeli ise, çarpım uzay Birinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlayamaz.

   (c) Λ damgalayan kümesi sayılamaz sonsuz bir küme olsun. Çarpan uzayların herbirisinin ikinci sayılabilme aksiyomunu sağladığını varsayalım. Bu durumda, çarpım uzayın ikinci sayılabilme aksiyomunu sağlayabilmesi için gerekli ve yeterli koşul, çarpan uzayların ancak sayılabilir sayıdasının ayrık olmayan topolojiden farklı bir topolojiye sahip olmasıdır.

   Gösteriniz.

4. Ayrık uzayların sonlu sayıdasının çarpımının da ayrık bir uzay olduğunu gösteriniz.

5. Ayrık uzayların sonsuz sayıdasının çarpımının da ayrık olması için, bu uzayların hemen hemen hepsinin (sonlu sayıdası hariç geri kalanlar) tek öğeli olması gerektiğini gösteriniz.