Bölüm 8

DÖNÜŞÜMLERLE KONDURULAN TOPOLOJİLER

8.1 İZDÜŞEL TOPOLOJİ

Tanım 8.1.1. Boş olmayan bir X kümesi ile bir $\mathscr{Y} = \{(Y\imath, \mathscr{T}\imath) : \imath \in I\}$ topolojik uzaylar ailesini düşünelim. Her $\imath \in I$ için bir $f_\imath : X \to Y\imath$ fonksiyonu verilmiş olsun. X kümesi üzerindeki topolojik yapılar arasında $\mathfrak{F} = \{f_\imath : \imath \in I\}$ fonksiyonlarının herbirisini sürekli kılan topolojilerin en kaba dokulusuna $\mathscr{H}$ diyelim. $\mathscr{H}$ topolojisine $\{\mathscr{T}\imath : \imath \in I\}$ topolojiler ailesinin, $\mathfrak{F}$ fonksiyonlarına göre, *izdüşel topolojisi* ve $(X, \mathscr{H})$ uzayında da $\mathscr{Y}$ uzaylarının $\mathfrak{F}$ ye göre, *izdüşel uzayı* denilir.

Önerme 8.1.1. *X, $\mathscr{Y}$, $\mathfrak{F}$ ve $\mathscr{H}$ yukarıdaki anlamda olsunlar.*

$$\mathfrak{S} = \{f_\imath^{-1}(T) : (\exists \imath \in I)\ T \in \mathscr{T}_\imath\} \tag{8.1}$$

diyelim; yani $\mathscr{T}_\imath$ topolojilerinden enaz birisine ait kümelerin X üzerindeki ters resimleri ailesine $\mathfrak{S}$ diyelim. Bu durumda $\mathfrak{S}, \mathscr{H}$ nın bir alt-tabanıdır.

İ S P A T : `Önerme` 4.1.7 gereğince, $\mathfrak{S}$ ailesinin sonlu arakesitlerinin ürettiği topolojiye $\mathscr{S}$ diyelim. `Teorem` 6.2.1 gereğince $\mathfrak{S} \subset \mathscr{H}$ dır, ki bu $\mathscr{S} \subset \mathscr{H}$ olması demektir. (Neden?). Öte yandan $\mathfrak{F}$ fonksiyonları $\mathscr{S}$ topolojisine göre X üzerinde süreklidirler; O halde $\mathscr{H} \subset \mathscr{S}$ dir. Buradan $\mathscr{S} = \mathscr{H}$ çıkar.

Bu önermeyi aşağıdaki iki biçimde de söyleyebiliriz. Aşağdaki önermelerde, yukarıda açıklanan gösterimler geçerli sayılacaktır.

Önerme 8.1.2. *Her $\imath \in I$ için $\mathscr{T}_\imath$ topolojisinin bir $\mathscr{B}_\imath$ tabanı verilmiş olsun. Bu tabanlara ait kümelerin ters resimlerinden oluşan*

$$\mathfrak{h} = \{A : (\exists\imath \in I) \quad (\exists B \in \mathscr{B}_\imath)\ A = f_\imath^{-1}(B)\} \tag{8.2}$$

ailesi, $\mathscr{H}$ izdüşel topolojisinin bir alt-tabanıdır.

İ S P A T: $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{S}$ olduğundan, $\mathfrak{h}$ nın sonlu arakesitleri ailesinin ürettiği $\mathscr{V}$ topolojisi $\mathscr{H}$ dan daha ince olamaz. Öte yandan, her $B \in \mathscr{B}_\imath$ için $f_\imath^{-1}(B) \in \mathfrak{h} \subset \mathscr{B}_\imath(\imath \in I)$ olduğundan `Önerme` 6.2.1 ye göre, $f_\imath$ fonksiyonları $\mathscr{V}$ topolojisine göre süreklidir. O halde $\mathscr{H}$ izdüşel topolojisi $\mathscr{V}$ den daha ince olamaz. Böylece $\mathscr{H} = \mathscr{V}$ çıkar.

Önerme 8.1.3. *Her $\imath \in I$ için $\mathscr{T}_\imath$ topolojisinin bir $\mathfrak{S}_\imath$ alt tabanı verilmiş olsun. Bu alt tabanlara ait kümelerin ters resimlerinden oluşan*

$$\mathfrak{L} = \{A : (\exists\imath \in I)\ (\exists S \in \mathfrak{S}_\imath)\ A = f_\imath^{-1}(S)\} \tag{8.3}$$

ailesi, $\mathscr{H}$ izdüşel topolojisinin bir alt-tabanıdır.

İ S P A T: `Önerme` 6.2.1 yerine, 6.2.1 Problem 5. konularak, önceki önermenin ispatı kelimesi kelimesine tekrarlanabilir.

Önerme 8.1.4. *$X, \mathscr{H}, \mathscr{Y}$ ve $\mathfrak{F}$ yukarıdaki anlamda olsunlar ve bir $(Z, \mathscr{Z})$ uzayı ile bir $g : Z \to X$ fonksiyonu verilsin. g nin sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, her $\imath \in I$ için $f_\imath \circ g = h_\imath : Z \to Y_\imath$ bileşke fonksiyonunun $\mathscr{Z} - \mathscr{T}_\imath$ sürekli olmasıdır.*

İ S P A T: g sürekli ise $f_\imath$ sürekli olduğundan $h_\imath$ bileşke fonksiyonu da süreklidir. Tersine olarak $h_\imath$ sürekli olsun. $\mathscr{H}$ topolojisinin (8.1) ile verilen $\mathfrak{S}$ alt-tabanına ait her hangi bir S alalım. (8.1) uyarınca, $S = f_\imath^{-1}(T)$ olacak şekilde bir $\imath \in I$ ile bir $T \in \mathscr{T}_\imath$ vardır. Buradan

$$g^{-1}(S) = g^{-1}(f_\imath^{-1}(T)) = h_\imath^{-1}(T) \in \mathscr{Z}$$

çıkar, ki bu, 6.2.1 Problem 5 gereğince, g nin sürekli olması demektir.

Örnek 8.1.1. *(Çarpım topolojisi)*

$\{X\imath, \mathscr{T}\imath) : \imath \in I\}$ verilen bir topolojik uzaylar ailesi olsun.

$$X = \prod_{\imath \in I} X_\imath \tag{8.4}$$

çarpım kümesi üzerinde

$$\pi_\imath : X \to X_\imath \,, \; (\imath \in I) \tag{8.5}$$

izdüşüm fonksiyonlarını sürekli kılan en kaba dokulu topolojiye verilen uzayların *çarpım topolojisi* denilir. Bu konuyu ileride daha ayrıntılı olarak inceleyeceğiz.

Örnek 8.1.2. *Bir topolojinin ters resmi:*

X bir küme, $(Y, \mathscr{S})$ bir topolojik uzay olsun ve $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. $\mathscr{S}$ topolojisinin f ye göre, X üzerindeki izdüşel topolojisine, yani X üzerinde f fonksiyonunu sürekli kılan topolojilelrin en kaba dokulusuna, $\mathscr{S}$ topolojisinin X üzerindeki *ters resmi* denilir. Kolayca görüleceği gibi, ters resim topolojisinin açık ve kapalı kümeleri, sırasıyla, $\mathscr{S}$ topolojisinin açık ve kapalı kümelerinin f altındaki ters resimleridir.

Örnek 8.1.3. *Bir topoloji ailesinin en küçük üst sınırı:*

Bir X kümesi üzerinde $\{\mathscr{T}_\imath : \imath \in I\}$ topolojilerinin verilsin. $(X, \mathscr{T}_\imath)$ uzayını $Y\imath$ ile gösterelim. $f_\imath : X \to X = Y_\imath$ özdeşlik dönüşümlerine göre, $\{\mathscr{T}_\imath : \imath \in I\}$ topolojilerinin X kümesi üzerindeki izdüşel topolojisine $\mathscr{H}$ diyelim. `Önerme` 8.1.1 ve $f_\imath$ nın tanımı gereğince, her $\imath \in I$ için $\mathscr{T}_\imath$ topolojisi $\mathscr{H}$ nın $\mathfrak{S}$ alttabanı tarafından kapsanır; yani $\mathscr{T}_\imath \subset \mathscr{H}$ dır. Öte yandan, her $\imath \in I$ için $\mathscr{T}_\imath \subset \mathscr{S}$ olacak şekilde X üzerinde bir $\mathscr{S}$ topolojisi düşünelim. Her $\imath \in I$ için $f_\imath$ fonksiyonunun $\mathscr{S} - \mathscr{T}_\imath$ sürekli olacağı apaçıktır. O halde, `Tanım` 8.1.1 gereğince, $\mathscr{H} \subset \mathscr{S}$ dir; yani $\mathscr{H}$ topolojisi verilen $\{\mathscr{T}_\imath : \imath \in I\}$ topolojilerinin hepsinden ince dokulu olan topolojilerin *en kabasıdır*, başka bir deyişle, $\mathscr{H}$ topolojisi $\{\mathscr{T}_\imath : \imath \in I\}$ topolojilerinin *en küçük üst sınırıdır.*

8.1.1 Problemler

1. `Örnek` 8.1.2 ile verilen ters resim topolojisinin açık ve kapalı kümelerinin sırasıyla, $\mathscr{S}$ nin açık ve kapalı kümelerinin ters resimlerinden ibaret olduğunu gösteriniz.

2. Yine yukarıdaki örnekte, her $x \in X$ için W kümeleri $\mathscr{S}$ ye göre $f(x)$ noktasının bir komşuluklar tabanını tarıyorsa X üzerinde $\mathscr{S}$ nin ters resim topolojisine göre, $f^{-1}(W)$ kümeleri x noktasının bir komşuluklar tabanını tarayacaktır. Gösteriniz.

3. $(X, \mathscr{T})$ ve $(Y, \mathscr{S})$ uzayları ile bir $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. f nin sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, X üzerinde $\mathscr{S}$ nin ters resim topolojisinin $\mathscr{T}$ topolojisinden daha kaba dokulu olmasıdır. Gösteriniz.

4. `Örnek` 8.1.3 gösterimleri altında, $\mathscr{H}$ topolojisi, X üzerindeki topolojiler arasında her $\imath \in I$ için $f_\imath$ fonksiyonunu sürekli kılan topolojilerin arakesitine eşittir. Gösteriniz. Bunun `Önerme` 7.2.4 ile eşdeğer olduğunu gösteriniz.

5. Bir X kümesi ile bir $\mathscr{Y} = \{(Y\imath, \mathscr{T}_\imath) : \imath \in I\}$ topolojik uzaylar ailesi veriliyor. Eğer $\mathcal{F} = \{f_\imath : X \to Y\imath\}$ sabit fonksiyonlardan oluşan bir aile ise, $\mathcal{F}$ ye göre $\mathscr{Y}$ nin X üzerindeki izdüşel topolojisini bulunuz.

6. $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerinde

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \mathscr{R}) \mid f : x \rightsquigarrow ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

fonksiyonlarını, yani $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bütün doğrusal fonksiyonları sürekli kılan en kaba dokulu topolojinin yine gerçel eksenin $\mathscr{R}$ salt topolojisi olduğunu gösteriniz.

7. $\mathbb{R}$ üzerindeki alt-limit topolojisini $\mathscr{L}$ ile gösterelim. $\mathbb{R}$ üzerinde

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \mathscr{L}) \mid f : x \rightsquigarrow ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

doğrusal dönüşümlerini sürekli kılan en kaba topolojinin ayrık topolojiden başkası olamayacağını; yani, $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ uzayının $\mathcal{F}$ ye göre $\mathbb{R}$ üzerindeki izdüşel topolojinin ayrık topoloji olduğunu gösteriniz.

8.2 TÜMEL TOPOLOJİ

Tanım 8.2.1. Boş olmayan bir X kümesi ile bir $\mathscr{Y} = \{(Y\imath, \mathscr{T}_\imath,) : \imath \in I\}$ topolojik uzaylar ailesini düşünelim. Her $\imath \in I$ için bir $f_\imath : Y\imath \to X$ fonksiyonu verilmiş olsun. X kümesi üzerindeki topolojik uzaylar arasında $\mathcal{F} = \{f_\imath : \imath \in I\}$ fonksiyonlarının herbirisini sürekli kılan topolojilerin en ince dokulusuna $\mathscr{T}$ diyelim. $\mathscr{T}$ topolojisine, $\{\mathscr{T}_\imath : \imath \in I\}$ topolojiler ailesinin, $\mathfrak{F}$ fonksiyonlarına göre *tümel topolojisi* ve $(X, \mathscr{T})$ uzayına da $\mathscr{Y}$ uzaylarının, $\mathfrak{F}$ ye göre *tümel uzayı* denilir.

Önerme 8.2.1. *$X, \mathscr{Y}$, $\mathfrak{F}$ ve $\mathscr{T}$ yukarıdaki anlamda olsunlar.*

$$\mathscr{D} = \{T : T \subset X, (\imath \in I \Rightarrow f_\imath^{-1}(T) \in \mathscr{T}_\imath)\} \tag{8.6}$$

diyelim. Bu durumda $\mathscr{D} = \mathscr{T}$ dur.

İ S P A T: Her $\imath \in I$ için $f_\imath^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathscr{T}_\imath$ olduğundan $\emptyset \in \mathscr{D}$ dir. Benzer olarak her $\imath \in I$ için $f_\imath^{-1}(X) = Y_\imath \in \mathscr{T}_\imath$ olduğundan $X \in \mathscr{D}$ dir. Öte yandan, her $\imath \in I$ için

$$f_\imath^{-1}\left(\bigcap_{j=1}^{n} T_j\right) = \bigcap_{j=1}^{n} f_\imath^{-1}(Tj), \; n \in \mathbf{N}, \tag{8.7}$$

$$f_\imath^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} Tj\right) = \bigcup_{j\in J} f_\imath^{-1}(Tj) \tag{8.8}$$

olduğundan [T1], [T2] ve [T3] sağlanır; yani $\mathscr{D}$ ailesi X üzerinde bir topolojik yapıdır. (8.6) tanımından hemen görüldüğü gibi $\mathscr{D}$ topolojisine göre f fonksiyonlarının herbirisi süreklidir. İspatı bitirmek için, $\mathscr{S}, X$ üzerinde her bir $f_\imath$ fonksiyonunu sürekli kılan bir topoloji ise $\mathscr{S} \subset \mathscr{D}$ olduğunu göstermek yetecektir. Gerçekten, bu durumda, $S \in \mathscr{S}$ ise her $\imath \in I$ için $f_\imath^{-1}(S) \in \mathscr{T}_\imath$ olacaktır, ki bu $S \in \mathscr{D}$ olmasını gerektirir.

Bundan böyle tümel topolojiyi $\mathscr{D}$ ile gösterelim.

Önerme 8.2.2. *$X, \mathscr{Y}$, $\mathfrak{F}$ ve $\mathscr{D}$ yukarıdaki anlamda olsunlar ve bir $(Z, \mathscr{Z})$ uzayı ile bir $g : X \to Z$ fonksiyonu verilsin. g nin sürekli olması için gerek ve yeterli koşul, her $\imath \in I$ için $gof_\imath = h_\imath$ bileşkesinin sürekli olmasıdır.*

İ S P A T: $f_\imath$ fonksiyonları sürekli olduğundan, eğer g sürekli ise $h_\imath$ bileşkesinin sürekli olacağı, yani koşulun gerekliği apaçıktır. Yeterliğini görmek için, her $\imath \in I$ için $h_\imath$ bileşkesinin sürekli olduğunu varsayarak bir $V \in \mathscr{Z}$ açık kümesi alalım. Her $\imath \in I$ için

$$f_\imath^{-1}(g^{-1}(V)) = h_\imath^{-1}(V) \in \mathscr{T}_\imath$$

olduğundan, (8.6) gereğince $g^{-1}(V) \in \mathscr{D}$ olacaktır.

Sonuç 8.2.1. *Yukarıdaki gösterimler altında bir $K \subset X$ alt-kümesinin $\mathscr{D}$ topolojisine göre kapalı olması için gerek ve yeterli koşul, her $\imath \in I$ için $f_\imath^{-1}(K) \subset Y_\imath$ ters resminin $\mathscr{T}_\imath$ topolojisine göre kapalı olmasıdır.*

İ S P A T:

$$\begin{aligned} K \in \mathscr{D}' &\Leftrightarrow K' \in \mathscr{D} \\ &\Leftrightarrow f_\imath^{-1}(K') \in \mathscr{T}_\imath \quad (\imath \in I) \\ &\Leftrightarrow (f_\imath^{-1}(K))' \in \mathscr{T}_\imath \quad (\imath \in I) \\ &\Leftrightarrow f_\imath^{-1}(K) \in \mathscr{T}_\imath' \quad (\imath \in I) \end{aligned}$$

dir.

Tanım 8.2.2. *Bölüm topolojisi*

Bir $(X, \mathscr{T})$ uzayı ile X kümesi üzerinde bir β denklik bağıntısı verilsin. X/β bölüm kümesi üzerindeki topolojiler arasında $x \to [x]$ ile tanımlanan $\varphi : X \to X/\beta$ bölüm dönüşümünü sürekli kılanların en ince dokusuna, $(X, \mathscr{T})$ uzayının β ya göre *bölüm topolojisi* denilir. Bu konuyu ileride ayrıntılı olarak inceleyeceğiz.

Tanım 8.2.3. *Bir topoloji ailesinin en büyük alt sınırı:*

Bir X kümesi üzerinde $\mathscr{Y} = \{\mathscr{T}_\imath : \imath \in I\}$ topolojileri verilsin. Tikel sıralanışına göre $\mathscr{Y}$ nin bir *en büyük alt-sınırı (inf)* vardır; başka bir deyişle $\mathscr{Y}$ ailesine ait topolojilerin herbirinden daha kaba olan topolojilerin en ince dokulusu, $\mathscr{Y}$ nin *en büyük alt sınırıdır.* Gerçekten, $(X, \mathscr{T}_\imath)$ uzayını Y_i ile gösterirsek, $f_\imath : X = Y_\imath \to X, \quad \imath \in I$ özdeşlik dönüşümlerine göre, $\mathscr{Y}$ ailesinin X üzerindeki $\mathscr{D}$ tümel topolojisi, $\mathscr{Y}$ nin en büyük alt sınırıdır. Çünkü her $\imath \in I$ için f_i özdeşlik dönüşümünün sürekli olması demek $\mathscr{D} \subset \mathscr{T}$ demektir. Öte yandan, tümel topoloji tanımına göre, bu koşulu sağlayan topolojilerin en ince dokulusu $\mathscr{D}$ dir.

8.2.1 Problemler

1. `Tanım` 8.2.3 gösterimleri altında,

$$\mathscr{D} = \bigcap_{i \in I} \mathscr{T}_i$$

olduğunu gösteriniz.

2. Bire-bir ve örten
$$f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$$
fonksiyonunun bir eşyapı resmi olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathscr{S}$ nin, Y üzerindeki topolojiler arasında f fonksiyonunu sürekli kılanların en ince dokulusu olmasıdır. Gösteriniz.

8.3 ALT UZAYLAR

Tanım 8.3.1. $(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay olsun ve bir $A \subset X$ alt-kümesi verilsin. A dan X içine $I(x) = x$ ile tanımlanan doğal gömmeye göre $\mathscr{T}$ nun A üzerindeki ters resim topolojisine, $\mathscr{T}$ nun A üzerine *kondurduğu topoloji* denilir. Bu topolojiyi $\mathscr{T}_A$ ile göstereceğiz. Bu durumda $(A, \mathscr{T}_A)$ topolojik uzayına $(X, \mathscr{T})$ uzayının bir *alt-uzayıdır* diyeceğiz.

Teorem 8.3.1. *Önceki tanımdaki gösterimler altında*
$$\mathscr{T}_A = \{A \cap T : T \in \mathscr{T}\} \tag{8.9}$$
dur; yani $(A, \mathscr{T}_A)$ alt-uzayının açık kümeleri, $(X, \mathscr{T})$ üst uzayının açık kümeleriyle A alt-kümesinin arakesitlerinden ibarettir.

İSPAT: $I : A \to X$ doğal gömme olmak üzere, her $T \in \mathscr{T}$ için $I^{-1}(T) = A \cap T$ olduğu apaçıktır. Oysa,
$$\mathscr{T}_A = \{I^{-1}(T) : T \in \mathscr{T}\} \tag{8.10}$$
olduğunu biliyoruz.

Teorem 8.3.2. *Alt uzay tanımındaki gösterimler altında, eğer $\mathscr{B}$ ailesi $\mathscr{T}$ nun bir tabanı ise, $\mathscr{B}$ nin A üzerindeki izi diyeceğimiz*
$$\mathscr{B}_A = \{B \cap A : B \in \mathscr{B}\} \tag{8.11}$$
ailesi $\mathscr{T}_A$ nın bir tabanı olur.

İSPAT: Eğer $T \in \mathscr{T}$ için $T = \cup_{j \in J} B_j, \quad B_j \in \mathscr{B}$, ise
$$A \cap T = \bigcup_{j \in J} B_j \cap A \tag{8.12}$$
bağıntısı istenen şeyi verecektir.

Önerme 8.3.1. *$(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay ve $B \subset A \subset X$ olsun. $\mathscr{T}_A$ nın B üzerine kondurduğu topoloji, $\mathscr{T}$ nun B üzerine kondurduğu $\mathscr{T}_B$ topolojisine eşittir.*

İSPAT:
Her $T \in \mathscr{T}$ için $T \cap B = (T \cap A) \cap B$ eşitliği isteneni verecektir. Bu önerme, alt-uzay olma bağıntısının *geçişli* olduğunu belirtir.

Uyarı 8.3.1. Alt-uzaylara ait nokta ya da alt-kümelerin topolojik özeliklerini belirtirken, bu özeliklerin hangi topolojiye göre olduğunu belirtmek gereklidir. Yerine göre bunları *$\mathscr{T}$ ya göre* ya da *$\mathscr{T}_A$ göre*, diye belirteceğiz.

Önerme 8.3.2. *$(X, \mathscr{T})$ uzayının bir $(A, \mathscr{T}_A)$ alt-uzayı için aşağıdakiler geçerlidir:*

(a) Alt-uzayda açık olan bir kümenin üst-uzayda açık olması gerekmez (bkz, 14.Problem). Alt-uzayda açık olan her kümenin üst-uzayda da açık olması için gerekli ve yeterli koşul $A \in \mathscr{T}$ olması; yani A nın üst-uzayda açık olmasıdır;

(b) Alt-uzayda kapalı olan bir kümenin üst-uzayda kapalı olması gerekmez. Alt-uzayda kapalı olan her kümenin üst-uzayda da kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul, A nın üst-uzayda kapalı olmasıdır.

(c) Bir $x \in A$ noktasının bir $F \subset A$ alt-kümesinin bir $\mathscr{T}_A$ -yığılma noktası olması için gerekli ve yeterli koşul, x noktasının bir $\mathscr{T}$ -yığılma noktası olmasıdır; yani F nin $\mathscr{T}$ ve $\mathscr{T}_A$ ya göre yığılma noktalarını, sırasıyla, $\tilde{F}$ ve $\tilde{F}_A$ ile gösterirsek,

$$\tilde{F}_A = \tilde{F} \cap A \tag{8.13}$$

olur.

(d) Bir $F \subset A$ alt-kümesinin $\mathscr{T}_A$ ya göre $\bar{F}_A$ ile göstereceğimiz kaplamı, F nin $\mathscr{T}$ ya göre F kaplamı ile A kümesinin arakesitine eşittir; yani

$$\bar{F}_A = \bar{F} \cap A \tag{8.14}$$

dir.

İSPAT:

(a): Eğer $A \in \mathscr{T}$ ise her $T \in \mathscr{T}$ için $A \cap T \in \mathscr{T}$ olur ve (8.10) den koşulun yeterliği görülür. Tersine olarak her $T \in \mathscr{T}$ için $A \cap T \in \mathscr{T}$ ise, özel olarak $X \in \mathscr{T}$ olduğundan, $A = A \cap X \in \mathscr{T}$ olacaktır; yani verilen koşul gereklidir.

(b): Alt-uzayın kapalı kümeleri, üst uzayın kapalı kümelerinin I doğal içerimi altındaki ters resimleridir (bkz. 8.4 Problem 1). Öyleyse, her $K \in \mathscr{T}'$ için $I^{-1}(K) = A \cap K$ olduğundan,

$$\mathscr{T}_A' = \{A \cap K : K \in \mathscr{T}'\} \tag{8.15}$$

demektir. Koşulun yeterliği hemen (8.15) bağıntısından görülüyor. Gerekliğini görmek için, her $K \in \mathscr{T}'$ için $A \cap K \in \mathscr{T}'$ olduğunu varsayalım; özel olarak $X \in \mathscr{T}_A'$ olduğundan, $A = A \cap X \in \mathscr{T}'$ olacağını düşünmek yetecektir.

(c): $F \subset A$ olduğundan

$$(T - \{x\}) \cap F = ((T \cap A) - \{x\}) \cap F$$

eşitliği vardır. O halde, $x \in A$ için

$$\begin{gathered}[x \in T \in \mathscr{T} \Rightarrow ((T - \{x\}) \cap F \neq \emptyset] \Leftrightarrow \\ [x \in (T \cap A) \in \mathscr{T}_A \Rightarrow ((T \cap A) - \{x\}) \cap F \neq \emptyset]\end{gathered} \tag{8.16}$$

olacaktır, ki bu, istenen (8.13) eşitliğinin varlığı demektir.

(d): `Önerme` 2.5.2 kullanılırsa (8.13) eşitliğinden (8.14) eşitliği kolayca çıkarılır.

Sonuç 8.3.1. *A nın bir F alt-kümesinin $(A, \mathscr{T}_A)$ alt-uzayında yoğun olması için gerekli ve yeterli koşul, A ile F nin $(X, \mathscr{T})$ üst-uzayındaki kaplamlarının eşit olmasıdır; yani*

$$A \subset \bar{F}_A \Leftrightarrow \bar{F} = \bar{A}$$

dir.

İ S P A T: (8.14) eşitliğinden

$$A \subset \bar{F}_A \Rightarrow A \subset \bar{F} \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{F}$$

çıkar. Oysa $F \subset A$ verildiğinden $\bar{F} \subset \bar{A}$ dır. O halde $\bar{F} = \bar{A}$ olacaktır.

Tersine olarak $\bar{F} = \bar{A}$ ise, yine (8.14) den

$$\bar{F}_A = \bar{F} \cap A = \bar{A} \cap A = \bar{A}_A$$

elde edilir.

Sonuç 8.3.2. *Yoğun olma bağıntısı geçişlidir.*

$(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay olsun ve $C \subset B \subset A \subset X$ alt-kümeleri verilsin. Eğer C kümesi B içinde yoğun ve B kümesi de A içinde yoğun iseler, C kümesi A içinde yoğundur.

İ S P A T: (8.3.1) bağıntısından, $\mathscr{T}$ ya göre, $\bar{C} = \bar{B} = \bar{A}$ bulunur.

Teorem 8.3.3. *$(X, \mathscr{T})$ ve $(Y, \mathscr{S})$ uzayları ile bir $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. $f(X) \subset B \subset Y$ olacak şekilde bir B alt-kümesini düşünelim.*

$$f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$$

fonksiyonunun bir $x_0 \in X$ noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, her $x \in X$ için $f_B(x) = f(x)$ diye tanımlanan

$$f_B : (X, \mathscr{T}) \to (B, \mathscr{S}_B)$$

fonksiyonunun, bu noktada sürekli olmasıdır.

İ S P A T: $I : (B, \mathscr{S}_B) \to (Y, \mathscr{S})$ doğal gömmesinin sürekli olduğunu biliyoruz. O halde

$$f = I \circ f_B$$

bileşkesine `Önerme` 8.1.4 yi uygulamak ispat için yeterlidir.

Teorem 8.3.4. *Sürekli bir fonksiyonun bir alt uzaya kısıtı da süreklidir.*

İ S P A T: $(X, \mathscr{T}), (Y, \mathscr{S})$ uzayları ve $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ fonksiyonu ile bir $A \subset X$ alt-kümesi verilsin. Eğer f fonksiyonu süreli ise, f nin A ya *kısıtı (daralmışı)* diye adlandıracağımız $f_A : (A, \mathscr{T}_A) \to (Y, \mathscr{S})$ fonksiyonu da sürekli olduğunu göstereceğiz.

$I : (A, \mathscr{T}_A) \to (X, \mathscr{T})$ doğal gömmesinin sürekli olduğunu düşünerek

$$f_A = f \circ I$$

bileşkesine `Önerme` 8.1.4 yi uygulamak yetecektir.

Uyarı 8.3.2. Kısıtlanmış f_A fonksiyonunun sürekli olması f nin sürekli olmasını gerektirmez. Bunu bir örnekle gösterelim.

$(X, \mathscr{T})$ uzayında kendisi ve tümleyeni yoğun olan; yani $\bar{A} = X$ ve $(A')^- = X$ olan bir $A \subset X$ alt-kümesi verilsin.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in A' \end{cases} \tag{8.17}$$

fonksiyonuna A nın belirtgen (karakteristik) fonksiyonu denildiğini biliyoruz. $Y = \{0, 1\}$ kümesi üzerindeki $\mathscr{A}$ ayrık topolojisini alalım. $\chi_A : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{A})$ fonksiyonu sürekli değildir; zira $\{0\}$ ve $\{1\}$ kümeleri hem açık hem kapalı kümeler olduğu halde bunların $\chi_A^{-1}(\{0\}) = A'$ ve $\chi_A^{-1}(\{1\}) = A$ ters resimleri ne açık ne de kapalıdır. Gerçekten, eğer A kapalı olsaydı, varsayım gereğince, $A = \bar{A} = X$ olacaktı ki bu, $A' = (A')^- = \emptyset$ olmasını gerektirir ve $(A')^- = X$ olduğu varsayımı ile çelişir. O halde A kapalı olamaz.

A açık olsaydı, A' kapalı olurdu. Oysa aynı düşünüşle, A' nün de kapalı olamayacağı çıkarılabilir.

Demek ki A ve A' kümeleri ne açık ne de kapalıdırlar. Öyleyse χ_A fonksiyonu X üzerinde süreksizdir.

Öte yandan χ_A fonksiyonunun A ya kısıtı sabit bir fonksiyon olduğu için süreklidir.

Örnek 8.3.1. Düzlem üzerindeki salt topolojinin gerçel eksen üzerine kondurduğu topoloji, bu eksen üzerindeki salt topolojidir.

Gerçekten, düzlemdeki salt topolojiye bir taban olarak, düzlemde kenarları eksenlere paralel olan bütün açık dikdörtgenleri alalım (bkz. `Örnek` 4.1.2). Bu tabana $\mathscr{B}$ diyelim. Bunun gerçel eksen üzerindeki $\mathscr{B}_R$ izi, gerçel eksen üzerindeki bütün açık aralıklardan ibarettir; ki bu gerçel eksen üzerindeki salt topolojinin bir tabanıdır. O halde, `Teorem` 8.3.2 uyarınca, istenen şey çıkar.

Örnek 8.3.2. Gerçel eksen üzerinde kapalı bir $I = [a, b]$ aralığını düşünelim. Salt topolojinin bu topoloji üzerine kondurduğu topolojinin bir tabanı

$$\mathscr{J} = \{[a, b], [a, c), (d, b], (c, d) : a \leq c \leq d \leq b\} \tag{8.18}$$

dir.

Örnek 8.3.3. Düzlemdeki salt topolojinin birim çember üzerine kondurduğu topolojinin bir tabanı, bu çember üzerinde iki ucu açık olan bütün yayların oluşturduğu ailedir.

Önerme 8.3.3. *Gerçel eksen üzerindeki kapalı aralıklar birbirlerine topolojik eşyapılıldır.*

Bunu göstermek için her $[a, b]$ kapalı aralığının $[-1, 1]$ kapalı birim aralığa topolojik eşyapılı olduğunu göstermek yetecektir; çünkü eşyapılı olmak bağıntısı geçişlidir. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı olan

$$h : x \to \frac{2}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

doğrusal dönüşümünün $[a, b]$ üzerine daralmışını $\hbar$ ile gösterelim. $\hbar$, $[a, b]$ aralığından [-1,1] aralığına BBÖ dir. Doğrusal dönüşüm olduğundan h süreklidir. `Teorem` 8.3.4 uyarınca, bunun [a,b] ye daralmışı olan φ dönüşümü bu alt-uzay üzerinde süreklidir. Öte yandan

$$h^{-1} : x \to \left(\frac{b-a}{2}\right)x + \frac{a+b}{2}$$

ters dönüşümünün $[-1, 1]$ üzerine daralmışı $\hbar^{-1}$ dir ve yukarıdaki düşünüşle $\hbar^{-1}$ ters dönüşümü de sürekli olacaktır.

Önerme 8.3.4. *Her açık aralık gerçel eksene topolojik eşyapılıdır.*

İSPAT: (8.18) daki düşünüşle, gerçel eksenin açık bir aralığı üzerine salt topolojinin kondurduğu topolojinin bir tabanının, bu aralığın kapsadığı bütün açık aralıkların oluşturduğu aile olduğu kolayca görülebilir. O halde, örneğin, $(-1, 1)$ açık aralığının bütün gerçel eksene topolojik eşyapılı olduğunu göstermek yetecektir. Bu eşyapılılığı sağlayan bir dönüşüm olarak, $x = -1$ ve $x = +1$ doğrularını düşey asimtot olarak kabul eden sürekli ve artan her hangi bir fonksiyon alınabilir. Örneğin

$$f : x \to \tan(\frac{\pi x}{2})$$

fonksiyonu isteneni sağlar. Gerçekten f nin $(-1, 1)$ den $\mathbb{R}$ ye BBÖ ve sürekli olduğunu biliyoruz. Ayrıca f fonksiyonu açık aralıkları açık aralıklara resmettiğinden, açık bir dönüşümdür. O halde `Önerme` 6.3.1 uyarınca, istenen şey çıkmış olur.

8.4 PROBLEMLER

1. $(A, \mathscr{T}_A)$ uzayı $(X, \mathscr{T})$ nun bir alt-uzayı olsun. Eğer $\mathfrak{S}, \mathscr{T}$ nun bir alt-tabanı ise, $\mathfrak{S}$ nin A üzerindeki izi diyeceğimiz

$$\mathfrak{S}_A = \{S \cap A : S \in \mathfrak{S}\} \tag{8.19}$$

ailesi $\mathscr{T}_A$ nın bir alt-tabanıdır. Gösteriniz.

2. $(A, \mathscr{T}_A)$ uzayı $(X, \mathscr{T})$ nun bir alt-uzayı olsun. Bir $x \in A$ noktasının $\mathscr{T}_A$-komşulukları

$$\mathscr{B}_A(x) = \{W \cap A : W \in \mathscr{B}(x)\} \tag{8.20}$$

ve $\mathscr{T}_A$-komşuluklar tabanı

$$\mathfrak{S}_A(x) = \{S \cap A : S \in \mathfrak{S}(x)\} \tag{8.21}$$

ailesidir.

3. $(A, \mathscr{T}_A)$ uzayının kapalı alt-kümeleri, $(X, \mathscr{T})$ üst-uzayının kapalı kümeleri ile A nın arakesitlerinden ibarettir. Gösteriniz.

4. Alt-uzayın (8.15) ile tanımlanan kapalı kümelerini, (8.10) ile tanımlanan açık kümelerin tümleyenleri olarak elde ediniz.

5. Gerçel eksen üzerindeki salt topolojinin $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerine kondurduğu topolojiyi belirleyiniz.

6. Ayrık bir uzayın her alt-uzayı ayrıktır. Gösteriniz.

7. Bir $(X, \mathscr{T})$ uzayı ile $B \subset A \subset X$ alt-kümeleri verilmiş olsun.

   (a) $\mathring{\mathrm{B}} \subset \mathring{\mathrm{B}}_A$

   (b) $(\partial B)_A \subset A \cap (\partial B)$ olduğunu gösteriniz. Kapsamların kesinlikle var olduğu hallere birer örnek veriniz.

8. Bir $(X, \mathscr{T})$ uzayı ile her hangi iki $B, A \subset X$ alt kümeleri verilmiş olsun

   (a) $A \cap \mathring{\mathrm{B}} \subset (A \cap B)^{\circ}_A$;

   (b) $A \cap \bar{B} \supset (A \cap B)^{-}_A$ olduğunu gösteriniz. Kapsamların kesinlikle varolduğu hallere birer örnek veriniz.

9. $(A, \mathscr{T}_A)$ alt-uzayının ayrık olması için gerekli ve yeterli koşul, A nın her noktasının $(X, \mathscr{T})$ üst-uzayında A nın ayrık bir noktası olmasıdır. Gösteriniz.

10. Bir $(X, \mathscr{T})$ uzayı ile $A, B \subset X$ alt-kümeleri verilsin ve $X = A \cup B$ olduğunu varsayalım. Eğer $M \subset A \cap B$ alt-kümesi $\mathscr{T}_A$ ve $\mathscr{T}_B$-kapalı (ya da açık) ise, M nin $\mathscr{T}$-kapalı (ya da açık) olduğunu gösteriniz.

11. Bir $(a, b]$ açık-kapalı aralığının $(-\infty, 0]$ ışınına ve $[a, b)$ kapalı-açık aralığının $[0, \infty)$ ışınına topolojik eşyapılı olduğunu gösteriniz.

12. Bir çember yayının her hangi bir noktası atılıyor. Kalan yayın gerçel eksendeki her hangi bir açık aralığa eşyapılı olduğunu gösteriniz.

13. Açık bir diskin (açık daire) düzleme topolojik eşyapılı olduğunu gösteriniz.

14. Açık bir aralık $\mathbb{R}$ de açık olduğu halde $\mathbb{R}^2$ de kapalıdır. Gösteriniz.

15. $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde
$$\mathscr{T} = \{T_n : T_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}\} \tag{8.22}$$
ailesi bir topolojidir. Gösteriniz.

16. (8.22) topolojisine göre $A = \{3, 5, 7, 9\}$ alt kümesinin kaplamını bulunuz.

17. (8.22) topolojisine göre $B = \{5, 6, 7, 8, \ldots\}$ alt kümesinin kaplamını bulunuz.

18. (8.22) topolojisine göre $C = \{9, 16, 27, 38, \ldots\}$ alt kümesinin yığılma noktalarını bulunuz.

19. $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ fonksiyonu verilsin. $\mathscr{T}$ topolojisi ne kadar ince dokulu olursa f nin sürekli olma olasılığı o kadar artar; $\mathscr{T}$ topolojisi ne kadar kaba dokulu olursa f nin sürekli olma olasılığı o kadar azalır. Tersine olarak, $\mathscr{S}$ topolojisi ne kadar ince dokulu olursa f nin sürekli olma olasılığı o kadar azalır; $\mathscr{S}$ topolojisi ne kadar kaba dokulu olursa f nin sürekli olma olasılığı o kadar artar. Örneklerle gösteriniz.

20. Bir X kümesi üzerinde $\mathscr{T}$ ve $\mathscr{S}$ iki topoloji ise,
$$\mathscr{T} \cap \mathscr{S} = \{T \cap S \quad : \quad T \in \mathscr{T} \quad \text{ve} \quad S \in \mathscr{S}\} \tag{8.23}$$
arakesiti X kümesi üzerinde bir topolojidir. Ama
$$\mathscr{T} \cup \mathscr{S} = \{T, S \quad : \quad T \in \mathscr{T} \quad \text{ve} \quad S \in \mathscr{S}\} \tag{8.24}$$
bileşimi X kümesi üzerinde, genellikle, bir topoloji değildir. $\mathscr{T} \cup \mathscr{S}$ bileşimin X kümesi üzerinde bir topoloji olduğu duruma bir örnek veriniz.

21. (8.23) ailesini kapsayan en kaba ve en ince topolojiler hangileridir?

22. (8.24) ailesini kapsayan en kaba ve en ince topolojiler hangileridir?

23. Yoğunluk geçişlidir; yani $(X, \mathscr{T})$ uzayında $A \supset B \supset C$ olmak üzere B kümesi A içinde yoğun ve C kümesi B içinde yoğun ise C kümesi A içinde yoğundur. Gösteriniz.

24. A kümesi $(X, \mathscr{T})$ uzayında yoğun, $(A, \mathscr{T}_A)$ alt uzayında $V \in \mathscr{B}(x)$ ise V nin $(X, \mathscr{T})$ uzayındaki $\bar{V}$ kaplamı $(X, \mathscr{T})$ uzayında x noktasının bir komşuluğudur. Gösteriniz.

25. $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki bütün mümkün topolojiler arasında birbiriyle karşılaştırılamayan; yani $\mathscr{T}_1 \not\subseteq \mathscr{T}_2$ ve $\mathscr{T}_1 \not\supseteq \mathscr{T}_2$ olan iki topoloji bulunuz.

26. Salt topolojiye göre $\mathbb{R}$ uzayında $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$, $\bar{A} \cap \bar{B}$ ve $\overline{A \cap B}$ kümelerinin birbirlerinden farklı olduğu A ve B kümeleri bulunuz.

27. X kümesi üzerinde tanımlı $\{\mathscr{T}_\lambda \, : \, \lambda \in \Lambda\}$ topolojiler ailesi verilsin.
$$\mathscr{T} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{T}_\lambda = \{T \, : \, (\forall \lambda \in \Lambda) \; T \in \mathscr{T}_\lambda\} \tag{8.25}$$
arakesitinin X üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

28. X kümesi üzerinde tanımlı $\{\mathscr{T}_\lambda \, : \, \lambda \in \Lambda\}$ topolojiler ailesi verilsin.
$$\mathscr{S} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{T}_\lambda = \{T \, : \, (\exists \lambda \in \Lambda) \; T \in \mathscr{T}_\lambda\} \tag{8.26}$$
bileşim ailesinin X üzerinde bir topoloji olmadığını gösteriniz. $\mathscr{S}$ ailesinin ürettiği topolojiyi açıklayınız.