Bölüm 7

TOPOLOJİLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

7.1 KABA ve İNCE DOKULULUK

7.1.1 KARŞILAŞTIRILABİLİR TOPOLOJİK YAPILAR

Tanım 7.1.1. Aynı bir X kümesi üzerinde $\mathscr{T}$ ve $\mathscr{S}$ topolojik yapıları verilmiş olsun. Eğer $\mathscr{T}$ topolojisine göre açık olan her küme $\mathscr{S}$ topolojisine göre de açık oluyorsa; yani $\mathscr{T} \subset \mathscr{S}$ ise $(X, \mathscr{T})$ uzayına $(X, \mathscr{S})$ uzayından *daha kaba dokuludur*, ya da, $\mathscr{T}$ topolojisi $\mathscr{S}$ topolojisinden *daha kabadır*, denilir.

$\mathscr{T}$ topolojisine $\mathscr{S}$ topolojisinden daha kabadır demek yerine, buna eş anlamlı olarak, $\mathscr{S}$ topolojisi $\mathscr{T}$ topolojisinden *daha ince dokuludur (daha incedir)*, denebilir.

Eğer $\mathscr{T}$ topolojisi $\mathscr{S}$ topolojisinden hem daha kaba hem de daha ince ise; yani $\mathscr{T} \subset \mathscr{S}$ ve $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ ise bu *iki topoloji eşittir* diyecek ve $\mathscr{T} = \mathscr{S}$ yazacağız.

Eğer $\mathscr{T} \subset \mathscr{S}$ ve $\mathscr{T} \neq \mathscr{S}$ ise, $\mathscr{T}$ topolojisi $\mathscr{S}$ topolojisinden *kesinlikle daha kabadır*; ya da buna eş anlamlı olarak $\mathscr{S}$ topolojisi $\mathscr{T}$ topolojisinden *kesinlikle daha incedir*, denilir.

Tanım 7.1.2. Bir X kümesi üzerinde verilen $\mathscr{T}$ ve $\mathscr{S}$ topolojilerinden birisi ötekinden daha kaba (ya da daha ince) ise, bu iki topolojiye *karşılaştırılabilir iki topolojik yapıdır*, denilir.

Tabii bir küme üzerindeki iki topolojinin her zaman karşılaştırılabilir olması gerekmez. Örneğin, $\mathscr{T}$ ya ait olup $\mathscr{S}$ ye ait olmayan bir A kümesi ile $\mathscr{S}$

ye ait olup $\mathscr{T}$ ya ait olmayan bir B kümesi varsa, bu iki topolojiden birisi ötekinden kaba ya da ince dokulu olamaz; yani bu iki topoloji karşılaştırılamaz.

Tanımdan hemen anlaşıldığı gibi, ince dokulu topolojinin kaba dokulu topolojiden daha çok açık kümesi vardır. Buradan hareketle, ince dokulu topolojinin daha çok kapalı kümesi olduğunu ve ince dokulu topolojiye göre bir noktanın komşuluklarının daha çok olduğunu söyleyebileceğiz. Ayrıca, iki topolojinin karşılaştırılması için özdeşlik dönüşümünün, topoloji tabanlarının ya da komşuluklar ailesinin nasıl kullanılabileceğini göreceğiz.

Önerme 7.1.1. *Bir X kümesi üzerinde $\mathscr{T}$ ve $\mathscr{S}$ topolojileri verilsin. $\mathscr{T}$ topolojisinin $\mathscr{S}$ topolojisinden daha ince dokulu olması için gerekli ve yeterli koşul $I : X \to X$ özdeşlik dönüşümünün $\mathscr{T} - \mathscr{S}$ sürekli olmasıdır.*

İ S P A T: $\mathscr{T}$ topolojisi $\mathscr{S}$ topolojisinden daha ince dokulu olsun. Her $M \in \mathscr{S}$ için $I^{-1}(M) = M \in \mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ olduğundan, `Teorem` 6.2.1 (d) gereğince I süreklidir.

Tersine olarak I sürekli ise her $M \in \mathscr{S}$ için $I^{-1}(M) = M \in \mathscr{T}$ dur; ki bu $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ olması demektir. O halde $\mathscr{T}$ topolojisi $\mathscr{S}$ topolojisinden daha ince dokuludur.

Önerme 7.1.2. *Bir X kümesi üzerinde $\mathscr{T}$ ve $\mathscr{S}$ topolojileri verilmiş olsun. Aşağıdaki özelikler birbirlerine denktirler:*

(a) $\mathscr{T}$ topolojisi $\mathscr{S}$ topolojisinden daha ince dokuludur;

(b) Her $x \in X$ için, $\mathscr{S}$ topolojisine göre x öğesinin her komşuluğu $\mathscr{T}$ topolojisine göre de bu noktanın bir komşuluğudur.

(c) Her $A \subset X$ alt-kümesi için, $\mathscr{T}$ topolojisine göre A kümesinin kaplamı $\mathscr{S}$ topolojisine göre A kümesinin kaplamı tarafından kapsanır;

(d) $\mathscr{S}$ topolojisine göre kapalı olan her alt-küme $\mathscr{T}$ topolojisine göre de kapalıdır.

İ S P A T: (a) $\Rightarrow$ (b) olduğu, $I : (X, \mathscr{T}) \to (X, \mathscr{S})$ özdeşlik dönüşümünün sürekliliği kullanılırsa `Teorem` 6.1.1(d) den çıkar. Artık (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a) olduğu `Teorem` 6.2.1 den hemen görülür.

Önerme 7.1.3. *$\mathscr{B}$ ve $\mathscr{M}$ aileleri, sırasıyla, bir X kümesi üzerindeki $\mathscr{T}$ ve $\mathscr{S}$ topolojileri için birer taban olsunlar. Eğer her $N \in \mathscr{M}$ kümesi $\mathscr{B}$ tabanına ait bazı kümelerin bir bileşimine eşit oluyorsa, $\mathscr{T}$ topolojisi $\mathscr{S}$ topolojisinden daha ince dokuludur.*

İ S P A T: Bir $M \in \mathscr{S}$ alalım. M kümesi $\mathscr{M}$ tabanına ait kümelerin bir bileşimi olarak yazılabilir. Oysa, varsayım gereğince, bu bileşimdeki $\mathscr{M}$ ye ait kümelerin herbirisi de $\mathscr{B}$ tabanına ait bazı kümelerin bir bileşimine eşittir. Öyleyse, M kümesi $\mathscr{B}$ tabanına ait kümelerin bir bileşimi olarak yazılabilmektedir; yani $M \in \mathscr{T}$ dur.

Önerme 7.1.4. *$\mathscr{B}$ ve $\mathscr{M}$ aileleri, sırasıyla, bir X kümesi üzerindeki $\mathscr{T}$ ve $\mathscr{S}$ topolojileri için birer taban olsunlar. $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ olması için gerekli ve yeterli koşul, her $N \in \mathscr{M}$ ve her $x \in N$ için $x \in B \subset N$ olacak şekilde bir $B \in \mathscr{B}$ öğesinin var olmasıdır.*

İ S P A T: $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ ise, $\mathscr{M} \subset \mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ olduğundan, her $N \in \mathscr{M}$ için $N \in \mathscr{T}$ olacaktır. O halde

$$N = \bigcup_{i \in I} B_i$$

olacak şekilde bir $\{B_i : i \in I\} \subset \mathscr{B}$ alt ailesi vardır ve buradan her $x \in N$ için $x \in B_x \subset N$ olacak şekilde bir $B_x \in \mathscr{B}$ öğesi seçilebilir, ki bu, koşulun gerekliği demektir.

Tersine olarak, her $N \in \mathscr{M}$ ve her $x \in N$ için $x \in B_x \subset N$ olacak şekilde bir $B_x \in \mathscr{B}$ varolsun. Bu durumda

$$N = \bigcup_{x \in N} \{B_x,\ B_x \in \mathscr{B},\ B_x \subset N\}$$

olacağından, istenen şey `Önerme` 7.1.3 den çıkar.

Örnek 7.1.1. Gerçel eksen üzerindeki *salt topoloji üst-limit topolojisiden* kesinlikle daha kabadır (bkz. `Örnek` 4.1.8).

İ S P A T:

1.Yol: Salt topolojinin tabanına ait her (a, b) açık aralığı

$$(a, b) = \bigcup_{n=k}^{\infty} \left(a, b - \frac{1}{n}\right], \quad b - a < \frac{1}{k}$$

şeklinde, üst limit topolojisinin tabanına ait $\left(a, b-\frac{1}{n}\right]$ kümelerinin bir bileşimi olarak yazılabilir. O halde `Önerme` 7.1.3 gereğince, salt topoloji *üst-limit topolojisinden* daha kabadır. Öte yandan $(a,b]$ açık-kapalı aralıkları üst limit topolojisine ait oldukları halde salt topolojiye ait değildirler, öyleyse salt topoloji üst-limit topolojisinden kesinlikle daha kabadır.

2.Yol: Salt topoloji tabanına ait bir (a,b) aralığı düşünelim. Her hangi bir $x \in (a,b)$ için $r = \min\{|x-a|, |x-b|\}$ olmak üzere $(x-r, x+r] \subset (a,b)$ olacaktır. O halde, `Önerme` 7.1.4 gereğince, üst-limit topolojisi salt topolojiden daha incedir.

Öte yandan $b \in (a,b]$ dir ve b öğesini içeren hiçbir açık aralık $(a,b]$ tarafından kapsanamaz. Öyleyse, `Önerme` 7.1.4 gereğince, salt topoloji üst-limit topolojisinden daha ince olamaz. Bu iki sonuç bir arada düşünülürse, salt topolojinin üst-limit topolojisinden kesinlikle daha kaba dokulu olduğu ortaya çıkar.

Uyarı 7.1.1. Daha ince topolojiye göre yoğun bir alt-küme daha kaba topolojiye göre de yoğundur. Başka bir deyişle, topoloji inceldikçe yoğun alt-kümeler azalır, topoloji kabalaştıkça yoğun alt-kümeler çoğalır.

7.1.2 PROBLEMLER

1. Bir X kümesi üzerinde $\mathscr{T}$ ve $\mathscr{S}$ topolojileri veriliyor. $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ ise, gösteriniz ki her $A \subset X$ alt-kümesinin $\mathscr{T}$ ya göre içi, $\mathscr{S}$ ye göre içinden daha büyüktür.

2. Aynı bir alt-tabana sahip iki topolojinin eşit olacağını gösteriniz.

3. Gerçel eksen üzerindeki salt topolojinin alt-limit topolojisinden kesinlikle daha kaba olduğunu gösteriniz.

4. $\mathfrak{s}_1$ ve $\mathfrak{s}_2$ sırasıyla $\mathscr{T}_1$ ve $\mathscr{T}_2$ topolojileri için birer alt-taban olsunlar.

   (a) $\mathfrak{s}_2 \subset \mathfrak{s}_1$ ise $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1$,

   (b) $\mathfrak{s}_2 \subset \mathfrak{s}_1 \subset \mathscr{T}_2$ ise $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$

   olduğunu gösteriniz.

7.2 TOPOLOJİLERİN SIRALANMASI

Önerme 7.2.1. *Boş olmayan bir X kümesi üzerinde tanımlanmış her topolojiler ailesi* "daha kaba dokulu (ya da daha ince dokulu) olmak" *bağıntısına göre tikel (kısmi) sıralıdır.*

İSPAT: Bu bağıntının *dönüşlü, antisimetrik ve geçişli* olduğu hemen görülebilir (bkz. 1.Problem).

Önerme 7.2.2. $\mathfrak{a}$ *ailesi $\mathscr{T}$ topolojisinin bir alt-tabanı olsun.* $\mathfrak{a}$ *ailesini kapsayan bütün topolojiler ailesinin en kabası $\mathscr{T}$ topolojisidir.*

İSPAT: Söz konusu topolojnin, $\mathfrak{a}$ ailesini kapsayan bütün topolojiler ailesinin *en büyük alt sınırı (inf)* olduğunu göstermeliyiz. $\mathfrak{a} \subset \mathscr{T}$ olduğunu biliyoruz; yani $\mathscr{T}$ topolojisi $\mathfrak{a}$ ailesini kapsayan topolojiler kümesine aittir. Öte yandan, $\mathscr{S}$ topolojisi $\mathfrak{a}$ ailesini kapsıyor olsun; yani $\mathfrak{a} \subset \mathscr{S}$ olsun. O halde $[T2]$ beliti gereğince, $\mathfrak{a}$ ailesinin bütün sonlu arakesitlerinden oluşan $\mathscr{B}$ ailesi $\mathscr{S}$ tarafından kapsanır; yani $\mathscr{B} \subset \mathscr{S}$ dır. Buradan, $[T3]$ beliti gereğince, $\mathscr{B}$ ailesine ait kümelerin bütün olası bileşimlerinden oluşan $\mathscr{T}$ ailesinin $\mathscr{S}$ tarafından kapsanacağı çıkar; yani $\mathscr{T} \subset \mathscr{S}$ olur. Demek ki $\mathscr{T}$ topolojisinin bir $\mathfrak{a}$ alt-tabanını kapsayan her $\mathscr{S}$ topolojisi $\mathscr{T}$ topolojisinden daha incedir. Şuhalde $\mathscr{T}$ topolojisi, $\mathfrak{a}$ ailesini kapsayan topolojiler kümesinin en büyük alt-sınırıdır. Üstelik, $\mathscr{T}$ topolojisi de bu kümeye ait olduğundan, kümenin en küçük öğesidir. Başka bir deyişle, $\mathscr{T}$ topolojisi $\mathfrak{a}$ ailesini kapsayan *topolojilerin en kabasıdır.*

Bir X kümesi üzerinde tanımlı bir topolojiler ailesinin arakesitinin de X kümesi üzerinde bir topoloji olduğunu biliyoruz (bkz. (9)) Bu arakesite değgin olan aşağıdaki önermeyi sık sık kullanacağız:

Önerme 7.2.3. *Boş olmayan bir X kümesi üzerinde tanımlanmış bir $\mathfrak{F} = \{\mathscr{T}_\imath : \imath \in I\}$ topolojiler ailesi kapsama bağıntısına göre tikel sıralıdır ve* en büyük alt sınırı (inf) $\mathfrak{F}$ *ailesinin arakesitine eşittir.*

İSPAT:

$$\mathscr{L} = \bigcap_{i \in I} \mathscr{T}_i = \{T \,:\, (\exists \imath \in I)\, T \in \mathscr{T}\} \tag{7.1}$$

arakesitinin $\mathfrak{F}$ *ailesinin en büyük alt sınırı (inf)* olduğunu göstereceğiz. (7.1) gereğince, her $\imath \in I$ için $\mathscr{L} \subset \mathscr{T}_\imath$ olacağı apaçıktır: yani $\mathscr{L}$ topolojisi $\mathfrak{F}$ ailesinin bir alt-sınırıdır.

Öte yandan, eğer bir $\mathscr{S}$ topolojisi $\mathfrak{F}$ ailesinin bir *alt sınırı* ise, alt-sınır tanımı uyarınca, her $\imath \in I$ için $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}_\imath$ olur. Öyleyse, (7.1) den, $\mathscr{S} \subset \mathscr{L}$ çıkar. Demek ki $\mathscr{L}$ topolojisi $\mathfrak{F}$ kümesinin *en büyük alt sınırıdır.* Tabii bu $\mathscr{L}$ topolojisinin $\mathfrak{F}$ kümesine ait olması gerekmez. Eğer $\mathfrak{F}$ ailesine aitse, $\mathscr{L}$ topolojisine $\mathfrak{F}$ ailesine ait topolojilerin *en kabasıdır*, diyeceğiz.

Şimdi $\mathfrak{F}$ ailesine ait *topolojilerin en küçük üst sınırının* ne olduğunu arayalım. `Önerme` 4.1.7 den, boş olmayan bir $\mathfrak{u}$ ailesinin bütün sonlu arakesitlerinden oluşan $\mathscr{B}$ ailesinin $X = \cup\mathfrak{u}$ kümesi üzerinde bir topoloji tabanı olacağını biliyouz. Bu topolojiye $\mathscr{U}$ diyelim. $\mathfrak{s}$ ailesine *$\mathscr{U}$ topolojisinin alt tabanı* diyorduk.

Artık asıl sorumuzu yanıtlayabiliriz. Verilen $\mathfrak{F} = \{\mathscr{T}\imath : \imath \in I\}$ *topolojiler ailesinin en küçük üst sınırı*, bu topolojilerden en az birisine ait olan bütün açık kümeleri kapsayan topolojilerin en kabası olacaktır. Şimdi bu topolojilerden enaz birisine ait olan bütün açık kümelerin oluşturduğu aileye $\mathfrak{u}$ diyelim; yani

$$\mathfrak{u} = \{T \,:\, (\exists \imath \in I)\; T \in \mathscr{T}_\imath\} \tag{7.2}$$

olsun. $\mathfrak{u}$ ailesini *alt taban* olarak kabul eden $\mathscr{U}$ topolojisi, aradığımız *en küçük üst sınır (sup)* olacaktır. Tabii bu topolojinin verilen $\mathfrak{u}$ ailesine ait olması gerekmez.

Böylece şu önermeyi ispatlamış oluyoruz:

Önerme 7.2.4. *Bir X kümesi üzerinde tanımlı bir topolojiler ailesinin en küçük üst sınırı (sup), verilen topolojilerin bileşimine eşit olan aileyi bir alt-taban olarak kabul eden topolojidir.*

Son olarak bir X kümesi üzerindeki bütün topolojilerin oluşturduğu kümeye $\mathfrak{X}$ diyelim. `Önerme` 7.2.1 ye göre, bu küme daha kaba (ya da daha ince) olma bağıntısına göre tikel sıralıdır.

Bu sıralamaya göre, *ayrık olmayan topoloji* $\mathfrak{X}$ kümesinin *en küçük öğesidir*; yani *en kabasıdır.*

Öte yandan X kümesinin her alt-kümesi ayrık topolojiye ait olduğundan, X üzerindeki her topoloji ayrık topolojiden daha kabadır; yani bir küme üzerindeki topolojilerin *en incesi* bu küme üzerindeki *ayrık topolojidir.*

Özel olarak, $\mathscr{T}, \mathscr{S} \in \mathfrak{X}$ ise $\mathscr{T} \cap \mathscr{S}$ arakesiti, $\mathscr{T}$ ile $\mathscr{S}$ topolojilerinin en büyük alt-sınırıdır (bkz. `Önerme` 7.2.3).

$\mathscr{T}$ ile $\mathscr{S}$ topolojilerinin en küçük üst sınırı (sup) ise $\mathscr{T} \cup \mathscr{S}$ ailesini bir alt-taban olarak kabul eden topolojidir (bkz. `Önerme` 7.2.4).

Böylece şu önermeyi ispatlamış oluyoruz:

Önerme 7.2.5. *Bir X kümesi üzerindeki bütün topolojilerden oluşan küme, "daha kaba olmak" bağıntısına göre bir tam kafes (lattice) dir. Bu kafesin en büyük ve en küçük öğeleri vardır ve bunlar, sırasıyla ayrık topoloji ile ayrık olmayan topolojidir.*

7.2.1 PROBLEMLER

1. Boş olmayan bir X kümesi üzerinde verilen bir topolojiler ailesinin *"daha kaba dokulu olmak"* bağıntısına göre tikel sıralanmış bir dizge oluşturduğunu gösteriniz (bkz. `Önerme` 7.2.1).

2. İkinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlayan uzay, Birinci Sayılabilme Aksiyomunu da sağlar. Gösteriniz.