Bölüm 4

TOPOLOJİ TABANI

4.1 TOPOLOJİ TABANI

Tanım 4.1.1. Bir $\mathfrak{S} \subset \mathscr{P}(X)$ ailesi verilsin. $\mathfrak{S}$ ye ait kümelerin her hangi bir bileşimine eşit olan bütün kümelerin oluşturduğu aileye $\mathfrak{S}$ nin ürettiği (doğurduğu) aile diyecek ye bunu $\mathfrak{S}^*$ ile göstereceğiz.

$\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}^*$ olduğu apaçıktır.

Önerme 4.1.1. *$A \in \mathfrak{S}^*$ olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in A$ için $x \in B \subset A$ olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{S}$ olmasıdır.*

İ s p a t: $A \in \mathfrak{S}^*$ ise A kümesi $\mathfrak{S}$ nin bir alt-ailesinin bileşimidir; yani

$$A = \bigcup_{i \in I} \{B_i : B_i \in \mathfrak{S}\}$$

dir. Doloyısıyla her $x \in A$ için $x \in B_i \subset A$ olacak şekilde bir $B_i \in \mathfrak{S}$ vardır.

Tersine olarak, her $x \in A$ için $x \in B_x \subset A$ olacak şekilde bir $B_x \in \mathfrak{S}$ varsa

$$A = \bigcup_{x \in A} \{B_x \subset A : B_x \in \mathfrak{S}\}$$

olduğundan $A \in \mathfrak{S}^*$ olacaktır.

Önerme 4.1.2. *$\mathfrak{B}$ ve $\mathfrak{S}$ iki aile ise $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{S}^*$ olması için gerekli ve yeterli koşullar şunlardır:*

(a) Her $S \in \mathfrak{S}$ ve her $x \in S$ için $x \in B \subset S$ olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}$ vardır;

(b) Her $B \in \mathfrak{B}$ ve her $y \in B$ için $y \in S \subset B$ olacak şekilde bir $S \in \mathfrak{S}$ vardır.

İSPAT: (a) ile (b) sağlanıyor olsun ve bir $A \in \mathfrak{B}^*$ verilsin $x \in A$ ise, önceki önerme gereğince, $x \in B \subset A$ olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}$ vardır. (b) gereğince, $x \in S \subset B$ olacak şekilde bir $S \in \mathfrak{S}$ yardır. O halde, önceki önerme gereğince, $A \in \mathfrak{S}^*$ olacaktır, ki bu $\mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{S}^*$ olması demektir. Benzer yolla $\mathfrak{S}^* \subset \mathfrak{B}^*$ olacağı da gösterilebilir; yani $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{B}^*$ olur.

Tersine olarak $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{B}^*$ olsun ve bir $B \in \mathfrak{B}$ verilsin. $B \in \mathfrak{B}^* = \mathfrak{S}^*$ olduğundan önceki önerme gereğince, (b) sağlanacaktır. (a) nin sağlandığı da benzer yolla gösterilir.

Tanım 4.1.2. $(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay olsun ve bir $\mathfrak{B} \subset \mathscr{P}(X)$ ailesi verilsin. Eğer $\mathfrak{B}^* = \mathscr{T}$ ise, $\mathfrak{B}$ ailesine $\mathscr{T}$-topolojisinin bir *tabanıdır*, denilir.

Bu durumda, $\mathfrak{B}$ ailesi $\mathscr{T}$-topolojisini *üretiyor* diyeceğiz.

Tanım 4.1.3. Eğer $\mathscr{T}$ nun sayılabilir bir tabanı varsa, $(X, \mathscr{T})$ uzayı *İkinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağlıyor denilir.

Şimdi verilen bir $\mathfrak{B}$ ailesinin bir $\mathscr{T}$ topolojisine ne zaman bir taban olabileceği sorusunu irdeleyelim.

Önerme 4.1.3. $\mathfrak{B} \subset \mathscr{P}(X)$ *ise* $(X, \mathfrak{B}^*)$ *ın bir topolojik uzay olması için gerekli ve yeterli koşullar şunlardır:*

(a) $X = \cup\{B : B \in \mathfrak{B}\}$;

(b) Her $A, B \in \mathfrak{B}$ ve her $x \in A \cap B$ ye karşılık $x \in C \subset A \cap B$ olacak şekilde bir $C \in \mathfrak{B}$ var.

İSPAT: $\mathfrak{B}^*$ ailesi X kümesi üzerinde bir topoloji olsun. $X \in \mathfrak{B}^*$ olduğundan (a) nın sağlandığını görmek kolaydır. Öte yandan, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}^*$ olduğundan $A, B \in \mathfrak{B}$ açık kümelerdir, dolayısıyla $A \cap B$ açıktır; yani $A \cap B \in \mathfrak{B}^*$ dır. Artık (b) nin sağlandığı Önerme 4.1.1 den görülür.

Tersine olarak (a) ile (b) sağlanıyor olsun. $\mathfrak{B}^*$ ailesine ait her hangi bir alt-ailenin bileşimi, $\mathfrak{B}^*$ ın tanımı gereğince, $\mathfrak{B}$ ye ait bir alt-ailenin bileşimine eşit olacaktır. Dolayısıyla, bu bileşim $\mathfrak{B}^*$ ailesine aittir; yani [T3] aksiyomu sağlanır.

Öte yandan $U, V \in \mathfrak{B}^*$ ve $x \in U \cap V$ ise, önceki önermeden, $x \in A \subset U$ ve $x \in B \subset V$ olacak şekilde $A, B \in \mathfrak{B}$ kümeleri varolacaktır, (b) gereğince

$$x \in C \subset A \cap B \subset U \cap V$$

olacak şekilde bir $C \in \mathfrak{B}$ vardır. O halde Önerme 4.1.1 den $U \cap V \in \mathfrak{B}^*$ olacaktır; yani [T2] aksiyomu da sağlanır.

$\mathfrak{B}^*$ ailesinin boş alt-ailesinin bileşiminin; yani boş kümenin $\mathfrak{B}^*$ ailesine ait olduğu açıktır.

Ayrıca X kümesinin $\mathfrak{B}^*$ ailesine ait olduğu (a) dan bellidir. Şuhalde [Tl] aksiyomu da sağlanır; böylece $(X, \mathfrak{B}^*)$ bir topolojik uzay olur.

Önerme 4.1.4. *İkinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlayan her $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayı ayrılabilir bir uzaydır.*

İSPAT: $\mathfrak{B}$ ailesi $\mathscr{T}$ topolojisinin sayılabilir bir tabanı olsun. $\mathfrak{B}$ nin boş olmayan her kümesinden bir nokta seçerek sayılabilir, bir A kümesi oluşturalım. $\bar{A} = X$ olduğunu göstermek istiyoruz. Olmayana ergi yöntemini kullanacağız. Eğer isteğimiz var olmasaydı bir $x \in (\bar{A})'$ noktası varolacaktı. Bu durumda $(\bar{A})' \in \mathscr{T}$, yani $(\bar{A})' \in \mathfrak{B}^*$ olduğundan, ilk önerme gereğince

$$x \in B \subset (\bar{A})' \tag{4.1}$$

olacak şekilde bir $B \in \mathfrak{B}$ var olurdu. Öte yandan, oluşumu gereğince A kümesi B ye ait bir noktayı kapsayacaktır ve bu (4.1) ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır; yani $(\bar{A})' = \emptyset$ olur, ki bu $\bar{A} = X$ demektir ve böylece $(X, \mathscr{T})$ uzayının ayrılabilirliği ortaya çıkar.

Tanım 4.1.4. $(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay olsun. Eğer, X kümesinin her açık örtüsünün sayılabilir bir alt-örtüsü varsa, $(X, \mathscr{T})$ uzayına bir *Lindelöf uzayıdır*, denilir.

Önerme 4.1.5 (Lindelöf). $(X, \mathscr{T})$ *İkinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlayan bir uzay ve $A \subset X$ ise A nın her açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü vardır.*

İSPAT: $\mathcal{A} = \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ ailesi A nın bir açık örtüsü ve $\mathcal{B} = \{B_k : k \in \mathbb{N}\}$ ailesi $\mathscr{T}$ nun sayılabilir bir tabanı olsun. Buna göre,

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \quad \subset \quad X \quad = \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} B_n \tag{4.2}$$

yazabiliriz. Açık kümeler tabana ait kümelerin bileşimi olduğundan, her k için $B_k \subset A_{\lambda_k}$ olacak şekilde bir tek $A_{\lambda_k} \in \mathcal{A}$ kümesi seçebiliriz. Böylece,

$$\mathcal{F} = \{A_{\lambda_k} \in \mathcal{A} \,:\, B_k \subset A_{\lambda_k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)\} \tag{4.3}$$

ailesini tanımlayalım. $\mathcal{F}$ ailesi $\mathcal{A}$ ailesinin sayılabilir bir alt ailesidir. (4.3) den

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{\lambda_k} \quad \supset \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \;=\; X \tag{4.4}$$

çıkar. (4.2) ve (4.4) bir arada düşünülürse,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{\lambda_k} \quad \supset A \tag{4.5}$$

olur. O halde, $\{A_{\lambda_k} \;:\; k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$ ailesi A nın sayılabilir bir alt örtüsü olacaktır.

Sonuç 4.1.1. *İkinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlayan bir topolojik uzay bir Lindelöf uzayıdır.*

Yukarıdaki önermede $A = X$ almak ispat için yetecektir.

Önerme 4.1.6. $(X, \mathscr{T})$ *İkinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlayan bir uzay ve* $A \subset X$ *sayılamayan bir alt küme ise,* A *kümesinin yığılma noktalarından en az birisi* A *ya aittir.*

İSPAT: Olmayana ergi yöntemini kullanacağız. $\mathscr{B}$ sayılabilir bir taban olsun. Eğer $A \cap A^{\sim} = \emptyset$ olsaydı, her $x \in A$ için $(T_x \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$ olacak şekilde, x noktasını içeren bir $T_x \in \mathscr{T}$ varolacaktı. Bu durumda, $\mathscr{B}$ taban olduğundan, $B_x \cap A = x$ olacak şekilde bir $T_x \subset B_x \in \mathscr{B}$ varolurdu. Böylece, $x \to B_x$ dönüşümü A dan $\mathscr{B}$ içine bire-bir (BB) olurdu. Bu durum, $\mathscr{B}$ sayılabilir olduğundan, A nın da sayılabilir olmasını gerektirirdi. Bu çelişki olamayacağından $A \cap \tilde{A} \neq \emptyset$ olmalıdır.

Verilen bir kümeler ailesinin bir topoloji üretmesi için gerekli ve yeterli koşulları `Önerme` 4.1.3 de görmüştük. Her aile bu koşulları sağlamayacağına göre, verilen bir ailenin her zaman bir topoloji üretmesi beklenemez. Ancak, bu ailenin üretgen yapılabilmesi olanaklarını araştirabiliriz.

Önerme 4.1.7. η *boş olmayan her hangi bir kümeler ailesi ise,* η *ya ait kümelerin sonlu arakesitlerinden oluşan* $\mathscr{B}$ *ailesi* $X = \cup\{S : S \in \eta\}$ *kümesi üzerinde bir topoloji üretir.*

İSPAT: $A, B \in \mathscr{B}$ ise $A \cap B \in \mathscr{B}$ olduğundan `Önerme` 4.1.3 gereğince, istenen şey sağlanır.

Tanım 4.1.5. $(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay olsun. Eğer X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir η ailesinin sonlu arakesitlerinin oluşturduğu aile $\mathscr{T}$ topolojisini üretiyorsa η ya $\mathscr{T}$ topolojisinin bir *alt tabanıdır* denilir.

Önceki önerme gereğince, boş olmayan her aile bir topolojinin alt tabanıdır, diyebiliriz. Bir topolojinin birden çok tabanı ve alt tabanı var olabilir.

Tanım 4.1.6. $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesini göstersin, $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \tag{4.6}$$

kümesine gerçel eksen üzerinde bir *açık aralık* denilir.

Önerme 4.1.8. *Gerçel eksen üzerindeki bütün açık aralıklardan oluşan*

$$\mathcal{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} \tag{4.7}$$

ailesi, $\mathbb{R}$ *üzerinde bir topoloji tabanıdır.*

İSPAT: `Önerme` 4.1.3 den kolayca görülür.

Tanım 4.1.7. $\mathcal{R}$ açık aralıklar ailesini taban kabul eden $\mathcal{R}^*$ topolojisine salt (mutlak) topoloji denilir. Buna göre, $(\mathbb{R}, \mathcal{R}^*)$ uzayına, gerçel sayılar üzerindeki *salt topoloji (mutlak topoloji)* uzayı diyeceğiz.

Uyarı 4.1.1. Gösterimde yalınlığı sağlamak için, çoğunlukla $\mathcal{R}^*$ salt topolojisini $\mathscr{R}$) simgesiyle göstereceğiz. Böylece, gerçel eksen üzerindeki salt topoloji uzayını

$$(\mathbb{R}, \mathscr{R}) \tag{4.8}$$

ile göstereceğiz.

Örnek 4.1.1. Gerçel eksen üzerinde

$$\kappa = \{(a, \infty),\ (-\infty, b) :\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

diye tanımlanan yarı-sonsuz açık aralıkların ailesini düşünelim. Kolayca görüleceği gibi κ nın sonlu arakesitleri ailesi, $\mathcal{R}$ yi kapsar, ama aynı topolojiyi, yani salt (mutlak) topolojiyi üretir. O halde, κ, gerçel sayıların *salt topolojisinin bir alt-tabanıdır.*

Tanım 4.1.8 (Üst limit topolojisi). $\mathbb{R}$ üzerinde

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

kümesine *açık-kapalı aralık* denilir.

$$\mathscr{U} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

ailesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji üretir. Bu topoloji, salt topolojiden farklıdır ve *üst limit topolojisi* adını alır.

Tanım 4.1.9 (Alt limit topolojisi). $\mathbb{R}$ üzerinde

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

kapalı-açık aralıklar ailesi *alt-limit topolojisini* üretir.

Örnek 4.1.2. $\mathbb{R}^2$ düzleminde aşağıdaki ailelerden herbiri aynı topolojiyi üretirler. Buna *düzlemin salt (mutlak) topolojisi* diyoruz:

1. Kenarları koordinat eksenlerine paralel olan bütün açık dikdörtgenlerin ailesi,

2. Düzlemdeki bütün çemberlerin içleri ailesi,

3. Düzlemdeki bütün eşkenar üçgenlerin içleri ailesi,

4. Kenarları eksenlere paralel olan bütün karelerin içleri ailesi.

Bu ailelerin birer topoloji ürettikleri `Önerme` 4.1.3 den; bu topolojilerin aynı oldukları ise `Önerme` 4.1.2 den kolayca görülebilir.

Örnek 4.1.3. $(X, \mathscr{A})$ ayrık bir topolojik uzay ise $\mathscr{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ ailesi $\mathscr{A}$ *ayrık topolojisi* için bir tabandır.

Örnek 4.1.4. Düzlemde yatay ve düşey bütün açık şeritler ailesi, mutlak topoloji için bir alt tabandır.

Önerme 4.1.9. *Her açık aralık sonsuz çoklukta rasyonel sayı içerir.*

İSPAT: (a,b) açık bir aralık olsun. Bu aralık içinde rasyonel bir q sayısının varlığını göstermek yetecektir. Çünkü, benzer düşünüşle, (a,q) içinde de bir başka rasyonel sayı varolacaktır. Böylece, tüme varım yöntemiyle, (a,b) aralığı içinde sonsuz çoklukta rasyonel sayının varolduğu gösterilebilir.

$x = b - a$ diyelim. Gerçel sayılar *Arşimet sıralı* olduğundan $\frac{1}{n} < x$ olacak biçimde doğal bir n sayısı vardır. Öte yandan $b > 0$ varsaymakla genellikten birşey yitirmeyiz. Çünkü, böyle değilse $-a > 0$ olmak üzere $(-b, -a)$ aralığını düşünebiliriz. Gene Arşimet özeliğinden

$$b \leq \frac{k}{n}$$

olacak biçimde doğal bir k sayısı vardır. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük doğal sayı h olsun. Bu durumda

$$\frac{(h-1)}{n} < b \leq \frac{h}{n}$$

olacaktır. Şimdi $a < (h-1)/n$ olduğunu gösterirsek ispat bitecektir. Eğer böyle olmasaydı $b - a = x \leq \frac{1}{n}$ olurdu ki bu bir çelişkidir.

Teorem 4.1.1. *Üzerindeki salt topolojiye göre gerçel eksen ayrılabilir bir topolojik uzaydır.*

İSPAT: Önerme 2.5.5 uyarınca, rasyonel sayılar kümesinin $\mathbb{R}$ içinde yoğun olduğu yukarıdaki önermeden ve mutlak topoloji tanımından çıkar.

İleride kullanacağımız bu önemli sonucu ayrı bir teorem olarak ifade edelim:

Teorem 4.1.2. *Mutlak topolojiye göre rasyonel sayılar kümesi gerçel sayılar kümesi içinde yoğundur. Benzer düşünüşle, irrasyonel satıların da yoğun olduğu görülür.*

4.2 Kapalı Kümeler İçin Taban

Bir topolojiyi belirlemek için açık kümelerini belirlemenin yetmesi gibi, kapalı kümelerinin belirlenmesi de yeterlidir. Dolayısıyla, açık kümeler için ortaya konan taban kavramının benzeri kapalı kümeler için de düşünülebilir. Bu, basit bir eşleklik (dualite) olgusudur.

Tanım 4.2.1. $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayında kapalı kümeler için taban öyle bir $\mathscr{F}$ ailesidir ki, kapalı her F kümesi $\mathscr{F}$ ailesine ait bazı kümelerin arakesitine eşittir.

Bunu simgelerle şöyle ifade edebiliriz:
Her kapalı F kümesi için

$$F = \bigcap_{\imath \in I} \{F_\imath \quad : \quad F_\imath \in \mathscr{F}\} \tag{4.9}$$

olacak biçimde bir $\{F_\imath : \imath \in I\} \subset \mathscr{F}$ alt ailesi varsa $\mathscr{F}$ ailesi kapalı kümeler için bir tabandır.

Önerme 4.2.1. $(X, \mathscr{T})$ *topolojik uzayında* $\mathscr{F}$ *ailesinin kapalı kümeler için bir taban olması için gerekli ve yeterli koşul, her kapalı* A *kümesi ve her* $x \notin A$ *için* $x \notin F$ *ve* $A \subset F$ *olacak şekilde bir* $F \in \mathscr{F}$ *kümesinin var olmasıdır.*

İSPAT:
Gerekliği: $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayında kapalı A kümesi ile $x \notin A$ noktası verilsin. $\mathscr{F}$ ailesi kapalı kümeler için bir taban ise

$$A = \cap_{\imath \in I} F_\imath$$

olacaktır. O halde, öyle bir $\jmath \in I$ indisi vardır ki $x \notin F_\jmath$ olur.

Yeterliği: $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayında kapalı A kümesi ile $x \notin A$ noktası verildiğinde $x \notin F$ ve $A \subset F$ koşulunu sağlayan bütün $F \in \mathscr{F}$ kümelerinin arakesiti A kümesidir; yani,

$$A = \cap\{F : \quad x \notin F \quad \text{ve} \quad A \subset F\}$$

olur.

4.3 KARMA PROBLEMLER

1. $(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay olsun. $\mathscr{T}^*$ nedir? $\mathscr{T}$ ailesi $\mathscr{T}$ topolojisi için bir taban mıdır?

2. Bir Lindelöf uzayında kapalı bir kümenin her açık örtüsünün, sayılabilir bir alt örtüsü olduğunu gösteriniz.

3. Ayrılabilir bir uzayın ikinci sayılabilme aksiyomunu (bkz. 4.1.3)sağlamasının gerekmediğini bir örnekle gösteriniz.

4. Mutlak topolojiye göre $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesinin içini ve kaplamını bulunuz $\mathbb{Z}$ kümesi $\mathbb{R}$ uzayının hiçbir yerinde yoğun olabilir mi?

5. $\mathbb{R}$ üzerinde $\sigma = \{(p, q) : p, q \in \mathbb{Q}\}$ ailesini, yani her iki ucu rasyonel olan bütün açık aralıkların ailesini düşünelim. $\sigma \subset \mathcal{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ dır. Acaba $\sigma^* = \mathcal{R}^* = \mathscr{R}$ midir?

6. $\xi = \{[p, q] : p, q \in \mathbb{Q}, \quad p < q\}$ ailesinin $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji tabanı olmadığını gösteriniz.

7. $\Phi = \{[a, b] : a \in \mathbb{Q}, \quad b \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}\}$ ailesinin $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji tabanı olduğunu gösteriniz.

8. $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x < b,\ c \leq y < d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ ailesinin $\mathbb{R}^2$ düzleminde bir topoloji tabanı olduğunu gösteriniz.

9. $\mathcal{V} = \{[p, q] : p, q \in \mathbb{Q},\ p \leq q\}$ ailesinin $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji tabanı olduğunu ve (6) ile ξ ailesinin bu topoloji için bir alt taban olduğunu gösteriniz.

10. Açık kümelerden oluşan ve topolojik uzayın bir tabanını kapsayan her aile yine bu topolojinin bir tabanıdır. Gösteriniz.

11. Bir ailenin farklı iki topolojiye alt taban olamayacağını gösteriniz.