Bölüm 3

KURATOWSKİ YÖNTEMİ

3.1 KURATOWSKİ YÖNTEMİ

KURATOWSKİ YÖNTEMİYLE
TOPOLOJİK YAPILARIN KURULUŞU

Bir topolojik yapıyı değişik yöntemlerle kurmak olanağı vardır. Bunlardan birisi ve belki de en yaygın olarak kullanılanı, bir topolojik yapının açık kümelerini belirlemek idi. Bu yöntemi önceki bölümlerde gördük. İkinci bir yöntem olarak, bir topolojik yapının kapalı kümelerini belirlemenin de o yapıyı kurmaya yeterli olacağını gösterdik. Şimdi bu kesimde, bir topolojik yapıyı kurmak için her alt-kümenin kaplamını belirlemenin yeterli olacağını göstereceğiz. İleride daha başka yöntemlerle de topolojik yapıların kurulabildiğini göreceğiz. Tabii, bütün bu yöntemlerin birbirlerine denk olduğunu söylemeye gerek yoktur.

Şimdi bu kesimde açıklayacağımız yöntem `Teorem` 2.5.1 in bir karşıtıdır. Bu yönteme *Kuratowski* yöntemi denilir.

Tanım 3.1.1 (Kuratowski Kaplamı). Bir X kümesinin $\mathscr{P}(X)$ kuvvet kümesi üzerinde aşağıdaki dört özeliği sağlayan bir $\alpha : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ fonksiyonu verilsin. Her $A, B \in \mathscr{P}(X)$ için

[K1] $\alpha(\emptyset) = \emptyset$

[K2] $A \subset \alpha(A)$

[K3] $\alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$

[K4] $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$

Bu özeliklere sahip α fonksiyonuna *Kuratowski dönüşümü* ve her $A \subset X$ için $\alpha(A)$ resmine A nın *Kuratowski kaplamı* denir.

Teorem 3.1.1. *Boş olmayan bir X kümesi üzerinde tanımlı her α Kuratowski dönüşümü X kümesi üzerinde bir ve yalnızca bir topoloji belirler.*

İSPAT: Bu topolojinin kapalı kümeleri

$$\mathscr{K} = \{K \subset X : \alpha(K) = K\} \tag{3.1}$$

ailesidir. Böyle olduğunu göstermek için, (3.1) ailesinin `Önerme` 2.2.1 [F1], [F2], [F3] aksiyomlarını sağladığını göstereceğiz.

[F1]: [K1] den hemen $\emptyset \in \mathscr{K}$ olduğu görülür. [K2] den $X \subset \alpha(X)$ çıkar. Oysa α nın tanımına göre $\alpha(X) \subset X$ dir. O halde $\alpha(X) = X$ çıkar; yani $X \in \mathscr{K}$ olur.

[F2]: $A, B \in \mathscr{K}$ ise, [K3] den

$$\alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B) = A \cup B$$

çıkar, ki bu $A \cup B \in \mathscr{K}$ olması demektir.

[F3]: Bir $\{K_i : i \in I, K_i \in \mathscr{K}\}$ ailesi verilsin. Bu ailenin arakesitinin yine $\mathscr{K}$ ailesine ait olduğunu göstereceğiz.

Bu iş için, öncelikle, şu özeliği gösterelim:

$$L \subset M \Rightarrow \alpha(L) \subset \alpha(M) \tag{3.2}$$

Gerçekten $L \subset M$ ise $M = L \cup M$ olacağından, [K3] gereğince,

$$\alpha(M) = \alpha(L \cup M) = \alpha(L) \cup \alpha(M)$$

çıkar, ki bu $\alpha(L) \subset \alpha(M)$ olması demektir. (Neden?) Şimdi, her $j \in I$ için

$$\cap_{i \in I} K_i \subset K_j$$

olduğunu düşünürsek, (3.2) den

$$\alpha\left(\bigcap_{i \in I} K_i\right) \subset \alpha(K_j) = K_j$$

yazabiliriz. Her $j \in I$ için bu kapsamanın varlığı

$$\alpha\left(\bigcap_{i\in I} K_i\right) \subset \bigcap_{i\in I}(K_i)$$

kapsamasını gerektirir. Oysa bu kapsamanın ters yönlüsü [K2] den bilinmektedir. O halde

$$\alpha\left(\bigcap_{i\in I} K_i\right) = \bigcap_{i\in I}(K_i)$$

dır. Bu eşitlik, (3.2) gereğince,

$$\alpha\left(\bigcap_{i\in I} K_i\right) \in \mathscr{K}$$

olmasını gerektirir.

Demek ki, `Önerme` 2.2.1 e göre $\mathscr{K}$ ailesi X üzerindeki bir topolojik yapının kapalı kümeleridir. Bu yapının açık kümeleri, Tanım 2.2.1 gereğince,

$$\mathscr{T} = \{K' : K \in \mathscr{K}\} \tag{3.3}$$

ailesidir. $\mathscr{T}'_\alpha$ ailesi α dönüşümüyle tek olarak belirlendiğine göre, buna ait kümelerin tümleyenleri olan $\mathscr{T}_\alpha$ ailesi de tek olarak belirlidir.

Son olarak, her $A \subset X$ alt-kümesinin $\mathscr{T}$ topolojisine göre $\bar{A}$ ile göstereceğimiz kaplamının verilen $\alpha(A)$ *Kuratowski kaplamı*'ndan başka bir şey olmadığını göstereceğiz. Gerçekten, [K4] ve (3.2) ile (3.1) den, her $A \subset X$ için $\alpha(A) \in \mathscr{K}$ çıkar. O halde [K2] ve `Tanım` (2.5.1) den $\alpha(A) \in \mathscr{K}_A$ dır. [*$\mathscr{K}_A$ ailesi A nın kapalı üst kümelerinin oluşturduğu ailedir.*] Bu ise, (2.6) gereğince, $\bar{A} \subset \alpha(A)$ olmasını gerektirir.

Tersine olarak, her $K \in \mathscr{K}_A$ için, $K = A \cup K$ ve $K \in \mathscr{K}$ olduğu düşünülerek, [K3] den

$$K = \alpha(K) = \alpha(A) \cup \alpha(K) = \alpha(A) \cup K$$

yazılabilir, Bu ise

$$\alpha(A) \subset \bigcap \mathscr{K}_A = \bar{A}$$

olmasını gerektirir. Demek ki

$$\bar{A} = \alpha(A) \tag{3.4}$$

dır.

Bu son eşitliği düşünürsek, `Teorem` 2.5.1 ile verilen W1-W4 aksiyomlarının (3.1.1) ile verilen K1-K4 aksiyomları ile aynı olduğu görülür. Demek ki, bu topolojiye göre her A alt-kümesinin $\bar{A}$ kaplamı, $\alpha(A)$ Kuratowski kaplamına eşittir.

Böylece teoremi kanıtlamış oluyoruz.

3.1.1 PROBLEMLER

1. Boş olmayan bir X kümesi verilsin. X kümesinin her A alt-kümesine karşılık aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir $\beta(A)$ alt-kümesi belirlenmiş olsun:

   B1: $\beta(X) = X$

   B2: $\beta(A) \subseteq A$

   B3: $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$

   B4: $\beta(A \cap B) = \beta(A) \cap \beta(B)$

   Bu durumda,

   $$\mathscr{T} = \{A \subset X : \beta(A) = A\}$$

   ailesi X kümesi üzerinde bir topolojik yapı oluşturur. Bu yapıya göre her A kümesinin A^o içi $\beta(A)$ kümesinden başka birşey değildir. Gösteriniz.

2. $X = \mathbb{N}$ olmak üzere $\gamma : \mathscr{P}(X) \longrightarrow \mathscr{P}(X)$ dönüşümü

   $$\gamma(A) = \begin{cases} A, & A \quad \text{sonlu ise} \\ X, & A \quad \text{sonsuz ise} \end{cases} \tag{3.5}$$

   olarak tanımlanıyor. Bu dönüşümün bir Kuratowski kaplama dönüşümü olduğunu gösteriniz. Bu topolojinin açık ve kapalı kümelerini belirleyiniz.

3. (3.5) dönüşümünün belirlediği topolojiyi $\mathbb{N}$ üzerinde, kapalı kümeleri, yalnızca, sonlu kümelerden oluşan topoloji (sonlu tümleyenler topolojisi) ile karşılaştırınız.