# Bölüm 1

# SİMGELER ve TERİMLER

## 1.1 KÜMELER CEBİRİ

Genel topoloji, temelde Kümeler Kuramına dayalıdır ve çağdaş analizin temelidir. Okurun bu iki alanın temel kavramlarını bildiğini varsayacak ve kitap boyunca Kümeler Kuramı'nın ve Klâsik Analiz'in yaygın kavramları ile simgelerini açıklamasız kullanacağız. Ancak, başlarken kavram birliğini oluşturmak için kitapta kullanılacak başlıca simgeleri ve terimleri listelemek iyi olacaktır. Fazla bilgi için bkz. [13], [8], [10],[12].

Soyut matematiksel yapılar, genellikle, gerçel ve karmaşık sayı kümelerinin yapıları örnek alınarak kurulur. O nedenle, sayı kümeleri üzerindeki cebirsel yapıların iyi bilindiğini varsayıyoruz.

1. Doğal sayılar kümesini $\mathbb{N}$,
2. Tam sayılar kümesini $\mathbb{Z}$,
3. Rasyonel sayılar kümesini $\mathbb{Q}$,
4. Gerçel sayılar kümesini $\mathbb{R}$,
5. Karmaşık sayılar kümesini $\mathbb{C}$ ve
6. İrrasyonel sayılar kümesini

   $$\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{Q}' = \complement\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^c$$

   simgelerinden herhangi birisi ile göstereceğiz.

*Tümevarım yöntemi* diye bilinen aşağıdaki teorem ispatlarda kullanılan iyi bir araçtır.

**Teorem 1.1.1** (Sonlu Tümevarım İlkesi). *$A \subset \mathbb{N}$ kümesi için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, $A = \mathbb{N}$ dir:*

- (i) $0 \in A$
- (ii) $n \in A \Longrightarrow (n+1) \in A$

Belli bir $P$ özelliğini sağlayan bütün $x$ öğelerinin oluşturduğu kümeyi $\{x|\mathscr{P}(x)\}$ simgesiyle göstereceğiz. Genellikle kümeleri büyük, öğeleri küçük harflerle yazacağız. Eğer $a$ öğesi, $A$ kümesine aitse, bunu $a \in A$ simgesiyle; değilse $a \notin A$ simgesiyle göstereceğiz.

$A$ kümesine ait olan her öğe aynı zamanda $B$ kümesine de ait ise $A$ kümesi $B$ kümesinin bir alt kümesidir, diyecek ve $A \subset B$ yazacağız. $A$ kümesi $B$ nin bir alt kümesi ise, $B$ kümesi $A$ nın bir üst kümesi olur ve $B \supset$ A yazılır. Bazen vurgulamak amacıyla *alt küme* yerine *altküme* ya da *alt-küme* yazacağız. Benzer yazış usulünü *üst küme* ve *alt uzay* gibi terimler için de kullanacağız. Yeri gelmişken, bir noktaya daha işaret etmekte yarar vardır. Matematik simgeleri ve deyimleri kullanırken, çoğunlukla, dilbilgisi kurallarından sapmamız gerekir. Örneğin, kesme($'$), $[-]$ gibi simgeler matematiksel ifadelerde, imlâ kurallarındakinden farklı anlama sahiptirler. Bu durumlarda, matematiksel ifadeyi öne çıkarmak için, imlâ kurallarını ihmal etmek zorunda kalırız; aksi halde matematiksel ifadeler anlamından sapacaktır.

Hiçbir öğesi olmayan kümeye boş kümeye diyor ve $\emptyset$ imi ile gösteriyoruz. Boş küme her küme tarafından kapsanır. Bir $X$ kümesinin bütün alt kümelerinin oluşturduğu kümeye $X$ in kuvvet kümesi diyecek ve $\mathscr{P}(X)$ simgesiyle göstereceğiz.

Mantıkta ve kümeler cebirinde kullanılan aşağıdaki imleri ve bağlaçları ispatlarda kısalığı sağlamak için yeri geldikçe kullanacağız.

1. $\exists$ (vardır),
2. $\forall$ (her),
3. $\Rightarrow$ (gerektirir),
4. $\Leftrightarrow$ (birbirini gerektirir),
5. $\neg$ (değil),

6. : (öyle ki),
7. $\wedge$ (ve),
8. $\vee$ (ya da)

$E$ kümesi evrensel küme olarak seçildiğinde bir $A \subset E$ alt kümesinin tümleyeni (tamlayanı)

$$A' = E - A = \{x | x \in E \wedge x \notin A\}$$

kümesidir.

$A$ ile $B$ kümelerinin bileşimi, arakesiti, farkı ve simetrik farkı, sırasıyla,

1. $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$
2. $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
3. $A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
4. $A \triangle B = A \cup B - A \cap B$

diye tanımlanır.

Bileşim ve arakesit işlemleri yalnız iki küme için değil, sayılabilir ya da sayılamaz çoklukta kümeler ailesi üzerinde de tanımlanabilir. $I$ herhangi bir indis (damga) kümesi olsun. Her $i \in I$ için bir $A_i$ kümesinin verilsin. Öğeleri $A_i$ kümeleri olan

$$\mathscr{A} = \{A_i : i \in I\}$$

kümesine bir kümeler ailesi ya da sınıfı denilir. Burada aile ya da sınıf deyiminin kullanılmasının nedeni, *"kümelerin kümesi"* kavramının yarattığı paradokstan sakınmak içindir.

$\mathscr{A}$ ailesine ait kümelerin bileşim ve arakesiti, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} A_i &= \{x \quad : \quad \exists i (i \in I \wedge x \in A_i\} \\ \bigcap_{i \in I} A_i &= \{x : \forall i (i \in I \Rightarrow x \in A_i)\} \end{aligned}$$

diye tanımlanır. Boş olmayan bir A kümesinin bir ayrışımı öyle bir

$$\mathscr{A} = \{A_i : i \in I\}$$

ailesidir ki, bu aile

(i) $\forall i \in I \Rightarrow A_i \neq \emptyset$

(ii) $\forall i, j \in I \wedge i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

(iii) $A = \bigcup_{i \in I} A_i$

özelliklerini sağlar. Özel olarak, (ii) koşulunu sağlayan herhangi bir $\mathscr{A}$ ailesine *ayrışıktır*, denilir.

$A$ ile $B$ kümelerinin kartezyen çarpımı

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \ \wedge \ b \in B\}$$

kümesidir.

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ kümelerinin kartezyen çarpımı, her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $a_i \in A_i$ olmak koşuluyla, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ biçimindeki n-sıralılarının oluşturduğu kümedir.

Bu küme aşağıdaki simgelerden birisiyle gösterilir:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots A_n \tag{1.1}$$

$$\times_{i=1}^{n} A_i \tag{1.2}$$

$$\Pi_{i=1}^{n} A_i \tag{1.3}$$

$$\prod_{i=1}^{n} A_i \tag{1.4}$$

Bir $G \subset A \times B$ alt kümesine $A \times B$ kartezyen çarpımı içinde bir grafiktir, denilir.

G grafiğinin tersi

$$G^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in G\} \subset B \times A$$

grafiğidir.

$\alpha = (A, B, G)$ sıralı üçlüsüne $A$ dan $G$ ye bir *bağıntı*, denilir.

$(x, y) \in G$ ise, $\alpha$ bağıntısı $x$ öğesini $y$ öğesine bağlıyor *(eşliyor)* diyecek ve $x\alpha y$ simgesiyle göstereceğiz.

$G \subset A \times B$ ve $H \subset B \times C$ ise

$$HoG = \{(x, z) \in A \times C \mid (\exists y \in B) \colon (x, y) \in G \wedge (y, z) \in H\}$$

grafiğine $G$ ile$H$ grafiklerinin bileşkesi denilir. $\alpha = (A, B, G)$ ve $\beta = (B, C, H)$ bağıntılarının bileşkesi

$$\alpha o \beta = (A, C, HoG)$$

bağıntısıdır.

## 1.2 FONKSİYON

$X$ ile $Y$ herhangi iki küme olsun. $X$ kümesinden $Y$ kümesine tanımlı bir $f$ *fonksiyonu*, $X$ kümesine ait herbir $x$ öğesini $Y$ kümesine ait birtek $y$ öğesine eşleyen bir bağıntıdır. Böyle bir bağıntıyı(fonksiyonu)

$$f : X \to Y$$

simgesiyle göstereceğiz. $X$ kümesine $f$ fonksiyonunun *tanım bölgesi* ve $Y$ kümesine de *değer bölgesi* denilir, $f$ fonksiyonu $x$ öğesini $y$ öğesine eşliyorsa, bunu, $y = f(x)$ ya da $f : x \to y$ simgelerinden birisiyle gösterecek ve $f$ fonksiyonu $x$ öğesini $y$ öğesi üzerine *resmediyor* (map) diyeceğiz, $y$ öğesine $x$ in $f$ altındaki resmi; $x$ öğesine de $y$ nin $f$ altındaki *önresmi (ters resmi)* diyeceğiz. Buna göre bir $A \subset X$ alt kümesinin $f$ altındaki resmi

$$f(A) = \{y \mid \exists x(x \in A \wedge y = f(x))\} = \{f(x) \mid x \in A\}$$

kümesidir. Benzer olarak bir $B \subset Y$ altkümesinin *önresmi*

$$f^{-1}(B) = \{x | \exists y(y \in B \wedge y = f(x)\} = \{x \mid f(x) \in B\}$$

kümesidir.

Her $x \in X$ için $f|_A(x) = f(x)$ koşulunu sağlayan $f|_A : A \to Y$ fonksiyonuna, $f$ fonksiyonunun $A$ kümesine *kısıtlanmışı (daralmışı)* denilir.

Bir $B$ kümesinden bir $A$ kümesine tanımlı olan bütün fonksiyonların oluşturduğu kümeyi $A^B$ ile göstereceğiz. $f : X \to Y$ fonksiyonunun tersi $f = (X, Y, G)$ bağıntısının $f^{-1} = (Y, X, G^{-1})$ ters bağıntısıdır. $f^{-1}(\{y\})$ yerine, kısaca, $f^{-1}(y)$ yazacağız. $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ oluyorsa $f$ bire-bir *(BB)* dir. $f$ nin *BB* olması için gerekli ve yeterli koşul, her $x \in X$ için $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ olmasıdır. $f(X) = Y$ ise $f$ örten `(Ö)` bir fonksiyondur. Hem *bire-bir*, hem de *örten* olan fonksiyonlara *bire-bir-örten* `(BBÖ)` fonksiyonlar denilir, $f$ `BBÖ` ise $f^{-1}$ ters bağıntısı da bir fonksiyon olur. Bu durumda $f$ ye *tersinebilir* bir fonksiyon ve $f^{-1} : Y \to X$ fonksiyonuna $f$ nin *ters fonksiyonu* diyeceğiz.

## 1.3 DENKLİK BAĞINTISI

Bir $X$ kümesi üzerinde tanımlanan $\beta$ bağıntısı, eğer yansımalı (reflexive), simetrik ve geçişliyse (transitive); yani

(i) $x \in X \Rightarrow x\beta x$

(ii) $(x, y \in X \wedge x\beta y) \Rightarrow y\beta x$

(iii) $(x, y, z \in X \wedge x\beta y \wedge y\beta z) \Rightarrow x\beta z$

ise, bir *denklik bağıntısıdır* denir.

Alışkanlık olduğu üzere denklik bağıntıları çoğu kitapta $\sim$ işaretiyle gösterilir. Ama biz, yerine göre farklı simgeler kullanacağız.

### 1.3.1 Denklik Sınıfları

X kümesi üzerinde $\beta$ bir denklik bağıntısı olsun. Herhangi bir $x \in X$ öğesini alalım. $X$ içinde $\beta$ bağıntısına göre $x$ öğesine denk olan bütün öğelerden oluşan alt kümeye $x$ in *denklik sınıfı* diyecek ve onu $[x]_\beta$ ile göstereceğiz, yani

$$[x]_\beta = \{y \mid y \in X \wedge y\beta x\}$$

dir. $\beta$ denklik bağıntısının başka birisiyle karşılaştırılması kuşkusu olmadığı zaman $[x]_\beta$ yerine kısaca $[x]$ yazacağız.

**Sonuç 1.3.1.** *$X$ kümesi üzerinde $\beta$ bir denklik bağıntısı ise, $\beta$ nın denklik sınıfları $X$ kümesinin bir ayrışımını oluşturur.*

Tersine olarak, $X$ in her ayrışımına karşılık, bu ayrışımı oluşturan alt kümeleri denklik sınıfları olarak kabul eden bir $\beta$ denklik bağıntısı vardır.

**Tanım 1.3.1.** $X$ kümesi üzerindeki bir denklik bağıntısı $\beta$ olsun. $\beta$ nın (farklı) denklik sınıflarından oluşan aileye, $X$ in $\beta$ ya göre bölüm kümesi diyecek ve $X/\beta$ ile göstereceğiz; yani

$$X/\beta = \{[x], [y], \ldots\}$$

dir. $X$ kümesinden $X/\beta$ bölüm kümesine tanımlanan

$$\varphi : x \to [x]$$

fonksiyonuna bölüm dönüşümü diyeceğiz.

# 1.4 SIRALAMA BAĞINTILARI

## 1.4.1 Kısmi Sıralama

**Tanım 1.4.1.** $A$ kümesi üzerinde, aşağıdaki niteliklere sahip $\preceq$ ikili bağıntısına bir *kısmi (tikel) sıralama* bağıntısı ve $(A, \preceq)$ çiftine de *kısmen (tikel) sıralanmış bir sistem*dir, denilir.

(i) $a \in A \Rightarrow a \preceq a$ (yansımalı-reflexive)

(ii) $(a, b \in A \wedge a \neq b \wedge a \preceq b) \Rightarrow \neg(b \preceq a)$ (antisimetrik)

(iii) $(a, b, c \in A \wedge a \preceq b \wedge b \preceq c) \Rightarrow a \preceq c$ (geçişli-transitive)

Matematikte sık kullandığımız bazı kısmi sıralı sistemler:

**Örnek 1.4.1.** Gerçel sayılar kümesi $\leq$ bağıntısına göre kısmi sıralıdır. (Biraz sonra bu sıralamanın daha fazla nitelikleri olduğunu söyleyeceğiz).

**Örnek 1.4.2.** Doğal sayılar kümesi $m|n$ ($m$ *sayısı* $n$ *sayısını böler*) bağıntısına göre kısmi sıralıdır.

**Örnek 1.4.3.** Bir $X$ kümesinin $\mathscr{P}(X)$ kuvvet kümesi $\subseteq$ kapsama bağıntısına göre kısmi sıralıdır.

**Örnek 1.4.4.** Bir vektör uzayının alt-vektör uzayları ailesi kapsama bağıntısına göre kısmi sıralıdır.

**Örnek 1.4.5.** $A = [0, 1]$ kümesi üzerinde $a \preceq b \Longleftrightarrow (a \geq b)$ bağıntısına göre kısmi sıralıdır.

$(A, \preceq)$ kısmi sıralanmış bir sistem olsun. $A$ kümesine ait $a$ ve $b$ ile göstereceğimiz herhangi iki öğe verilsin. Eğer $a \preceq b$ ya da $b \preceq a$ oluyorsa $a$ ile $b$ öğelerine $\preceq$ bağıntısına göre *karşılaştırılabilir* iki öğe, bağıntıya da *örgendir*, diyeceğiz.

Kısmi sıralanmış bir kümenin herhangi iki öğesinin karşılaştırılabilir olması gerekmez. Başka bir deyişle, kısmi sıralı bir kümede birbirleriyle karşılaştırılamayan öğeler var olabilir.

### Alt Sınırlar, Üst Sınırlar

**Tanım 1.4.2.** $(A, \preceq)$ kısmi sıralanmış bir sistem olsun ve bir $B \subset A$ alt-kümesi verilsin. Eğer bir $a \in A$ öğesi $B$ nin her öğesinden önce geliyorsa; yani

$$\forall b(b \in B \Rightarrow a \preceq b)$$

ise, a öğesine B alt-kümesinin bir *alt sınırıdır*, denilir.

Tersine olarak, eğer bir $a \in A$ öğesi $B$ nin her öğesinden sonra geliyorsa, yani

$$\forall b(b \in B \Rightarrow b \preceq a)$$

ise, a öğesine B alt-kümesinin bir *üst sınırıdır*, denilir.

Bazen vurgulamak amacıyla alt sınır ve üstsınır yerine alt-sınır (altsınır) ve üst-sınır (üstsınır) yazacağız.

### Infimum ve Supremum

**Tanım 1.4.3.** *Alt sınırların en büyüğü (infimum)* $(A, \preceq)$ kısmi sıralanmış bir sistem olsun ve bir $B \subset A$ alt-kümesi verilsin. Eğer bir $a \in A$ öğesi aşağıdaki iki özelliğe sahipse, buna $B$ alt-kümesinin alt-sınırlarının en büyüğüdür ya da en büyük alt sınırdır (infimum), diyeceğiz:

(i) $a$ öğesi $B$ kümesinin bir alt sınırıdır,

(ii) $a$ öğesi $B$ kümesinin bütün alt sınırlarından oluşan kümenin bir üst sınırıdır.

$A$ kümesinin alt sınırlarının en büyüğünü $\text{ebas}(A)$ ya da $\inf(A)$ simgesiyle göstereceğiz.

**Tanım 1.4.4.** *Üst sınırların en küçüğü (supremum)* $(A, \preceq)$ kısmi sıralanmış bir sistem olsun ve bir $B \subset A$ alt-kümesi verilsin. Eğer bir $a \in A$ öğesi aşağıdaki iki özelliğe sahipse, buna $B$ alt-kümesinin üst sınırlarının en küçüğüdür ya da en küçük üst sınırdır (supremum) , diyeceğiz:

(i) $a$, $B$ nin bir üst-sınırıdır,

(ii) $a$, $B$ nin bütün üst sınırlarından oluşan kümenin bir alt sınırıdır.

$A$ kümesinin üst sınırlarının en büyüğünü eküs$(A)$ ya da $\sup(A)$ simgesiyle göstereceğiz.

Bu kavramlar, özellikle, analiz derslerinde çok sık geçer. Bazen vurgulamak amacıyla alt sınır, üst sınır, en küçük ve en büyük terimleri yerine, sırasıyla, *alt-sınır, üst-sınır, en-küçük ve en-büyük* yazacağız. Kısalığı sağlamak için $B$ nin alt-sınırlarının en-büyüğünü *inf(B)* ile üst- sınırlarının en-küçüğünü *sup(B)* ile göstereceğiz. Analiz kitaplarında, çoğunlukla, *aseb* yerine *"inf" (infimum)*, *üsek* yerine *"sup" (supremum)* yazılır.

Kısmi sıralanmış bir A kümesinin herhangi bir $B$ alt-kümesi verilmiş olsun. $B$ nin birden çok alt sınırı ve birden çok üst sınırı olabilir. Tabii, $B$ nin hiçbir alt-sınırı ya da hiçbir üst-sınırı olmayabilir. Benzer şekilde, $B$ nin alt sınırlarının en büyüğü ya da üst-sınırlarının en küçüğü olmayabilir. Ama varsa, bunlar ancak birer tanedir. Başka bir deyişle, *inf(B)* ve *sup(B)* öğelerinin her ikisi de varolmayabilir, yalnız birisi varolabilir ya da her ikisi de varolabilir. Varlık halinde bunlar birer tanedir. Kolayca sezilebileceği gibi, $B$ nin bir alt-sınırı, bir üst-sınırı, *inf(B)* ya da *sup(B)* öğeleri, $B$ kümesine ait olabilir ya da olmayabilir.

### Maksimal ve Minimal

**Tanım 1.4.5.** *Maksimal Öğe* $(A, \preceq)$ kısmi sıralanmış bir sistem olsun ve bir $B \subset A$ alt-kümesi verilsin. Eğer $B$ kümesinin hiçbir öğesi bir $u \in B$ öğesinden sonra gelmiyorsa; yani

$$\exists b(b \in B \wedge b \geq u) \Rightarrow b = u$$

ise, $u$ öğesine $B$ nin *maksimal (büyükçe) bir öğesidir*, denilir.

**Tanım 1.4.6.** *Minimal Öğe* $(A, \preceq)$ kısmi sıralanmış bir sistem olsun ve bir $B \subset A$ alt-kümesi verilsin. Eğer $B$ kümesinin hiçbir öğesi bir $v \in B$ öğesinden önce gelmiyorsa; yani

$$\exists b(b \in B \wedge b \preceq v) \Rightarrow b = v$$

ise, $v$ öğesine $B$ nin *minimal (küçükçe) bir öğesidir*, denilir.

## 1.4.2 En Büyük ve En Küçük

$A$ ile $B$ yukarıdaki anlamda olsunlar. Eğer $\sup(B)$ varsa ve $B$ ye aitse, buna $B$ nin *en büyük öğesi (maksimum)* diyeceğiz. Benzer şekilde $\inf(B)$ varsa ve $B$ ye aitse, buna $B$ nin *en küçük öğesi* diyeceğiz.

### 1.4.3 Tam Sıralama

$(A, \preceq)$ kısmi sıralanmış bir sistem olsun ve bir $B \subset A$ alt-kümesi verilsin. Eğer $B$ ye ait herhangi iki öğe birbiriyle karşılaştırılabiliyorsa, $B$ kümesi $\preceq$ bağıntısına göre *tam sıralıdır*, denilir.

Başka bir deyişle, $B$ kümesi üzerindeki $\preceq$ bağıntısı *yansımalı, antisimetrik, geçişli ve örgün* ise $(B, \preceq)$ tam sıralanmış bir sistemdir. Bu durumda, $\preceq$ bağıntısına bir *tam sıralama bağıntısıdır*, diyeceğiz.

Tam sıralama bağıntılarına *doğrusal sıralama, lineer sıralama, tümel sıralama, total sıralama, zincir* adları da verilir. Eğer (A,$\preceq$) kısmi sıralanmış bir sistem ve $B \subset A$ alt-kümesi tam sıralanmış ise, $B$ ye $A$ içinde bir *zincidir*, diyeceğiz.

`Örnekler:` $\leq$ bağıntısına göre $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sayı kümeleri tam sıralı sistemlerdir.

**Örnek 1.4.6.** $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi ya da bunun herhangi bir alt-kümesi $\leq$ bağıntısına göre tam sıralıdır.

$\mathbb{R}$ nin bu sıralamaya göre hiç bir alt-sınırı ve üst-sınırı yoktur.

$\mathbb{R}$ nin

$$[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \leq x \leq b\}$$

şeklinde tanımlanan kapalı aralığının alt sınırları $(-\infty, a]$ kümesidir. Buradan görüleceği gibi, $[a, b]$ nin alt sınırlarının en-büyüğü $a$ dır. $a \in [a, b]$ olduğu için bu öğe $[a, b]$ nin en-küçük öğesidir. Benzer şekilde $[a, b]$ nin üst-sınırları $[b, \infty]$ kümesidir. Üst-sınırların en-küçüğü $b$ dir. $b \in [a, b]$ olduğu için $[a, b]$ nin en-büyük öğesi $b$ dir. Öte yandan

$$(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\}$$

şeklinde tanımlanan açık aralığın alt ve üst sınırları ile alt sınırlarının en büyüğü ve üst sınırlarının en küçüğü $[a, b]$ aralığının karşılık gelen öğeleriyle aynıdır. Ancak $a, b \notin (a, b)$ olduğundan $(a, b)$ nin en küçük ve en büyük öğeleri yoktur.

### 1.4.4 İyi Sıralama

$A$ kümesi üzerinde bir $\preceq$ bağıntısı verilsin. Aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa $\preceq$ bağıntısına $A$ üzerinde bir *iyi-sıralama bağıntısıdır*, denilir.

(i) $(A, \preceq)$ kısmi sıralanmış bir dizgedir.

(ii) $A$ nın boş olmayan her alt-kümesinin bir en küçük öğesi vardır.

Bu durumda $(A, \preceq)$ iyi sıralanmış bir sistem olur. İyi sıralanmış bir $A$ kümesinin boş olmayan her $B$ alt-kümesinin *en küçük öğesi* aynı zamanda $B$ nin alt sınırlarının en büyüğüdür.

**Örnek 1.4.7.** $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi $\leq$ bağıntısına göre iyi sıralıdır.

**Örnek 1.4.8.** Alfabemiz $A < B < C < \ldots$ bağıntısına göre iyi sıralıdır.

**Örnek 1.4.9.** Nicelik (kardinal) sayıları kümesi iyi sıralıdır.

**Örnek 1.4.10.** Sıra (ordinal) sayılar kümesi iyi sıralıdır.

Tam sıralanmış bir kümede en küçük öğe ile küçük bir öğe ve en büyük öğe ile büyük bir öğe arasında fark yoktur. Yani tam sıralanmış bir kümenin bir küçük öğesi varsa bu öğe aynı zamanda kümenin en küçük öğesidir. Büyük bir öğe için de benzer şey söylenebilir.

Gerçel sayılar kümesi $\leq$ bağıntısına göre *sıraca tam* `(Dedekind tam)` dır; yani $\mathbb{R}$ nin boş olmayan herhangi bir $\mathbf{S}$ altkümesinin bir üst sınırı varsa, bu kümenin $\mathbb{R}$ içinde en küçük üst sınırı vardır.

Üzerindeki sıralama bağıntısı ile birlikte reel (gerçel) sayılar dizgesini, çoğunlukla *reel (gerçel) eksen* diye çağıracağız. Reel sayılar kümesine $-\infty$ ve $+\infty$ simgeleri katılarak *genişlemiş reel sayılar dizgesi* elde edilir. Bu dizgeyi $\overline{\mathbb{R}}$ ya da $[-\infty, \infty]$ simgelerinden birisiyle gösteriyoruz. Benzer olarak, *kompleks (karmaşık) sayılar* kümesine $\infty$ simgesi katılarak *genişlemiş karmaşık sayılar dizgesi* elde edilir. Doğal sayılar kümesi $\leq$ bağıntısına göre *iyi sıralı bir sistem* oluşturur [13].

**Tanım 1.4.7.** Herhangi bir $\{A_i \mid i \in I\}$ kümeler ailesi verilsin. Bu ailenin *kartezyen çarpımı* her $i \in I$ için $a(i) \in A_i$ koşulunu sağlayan

$$a : I \to \bigcup A_i$$

fonksiyonlarının oluşturduğu kümedir.

Bu küme aşağıdaki bağıntı ile tanımlanabilir:

$$\prod_{i \in I} A_i = \{a \mid a : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \ , \ \forall i (i \in I \Rightarrow a(i) \in A_i)\}$$

Sonlu çarpımın bir genellemesi olarak bazen $a \in \bigcup A_i$ öğesini (fonksiyonunu), her $i \in I$ için $a(i) = a_i$ olmak üzere,

$$a = (a_i)\ ,\ i \in I$$

şeklinde yazacağız. Burada her $i \in I$ için $a_i$ öğesine $a$ nın $i - inci$ bileşeni denilir.

**Tanım 1.4.8.** Yukarıdaki simgeler varsayılarak her $j \in I$ için

$$\pi_j : \Pi_{i \in I} A_i \to A_j\ ,\ \pi_j : a \to a_j$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyona $\Pi A_i$ kartezyen çarpımından *j-inci bileşen [kon, koordinat]* üzerine `izdüşüm` diyeceğiz.

## 1.5 SEÇME AKSİYOMU

SEÇME AKSİYOMU VE EŞDEĞERLERİ

Sonlu sayıda, boş olmayan kümelerin kartezyen çarpımının boş olmadığını *sonlu tüme varım ilkesiyle* görebiliriz. Acaba, bu özelliği herhangi bir sonsuz kümeler ailesi için de söyleyebilir miyiz? Çağdaş matematikte önemli bir araç olarak kullanılan bu özelliğin varlığı ispatlanamadı. Bunun üzerine, 1900 yıllarında Alman Matematikçisi *Ernst Zermelo* bu özelliğin bir aksiyom (belit) olarak kabul edilmesini önerdi. *Seçme Aksiyomu (Beliti)* diye adlandırılan bu özelliği şöyle ifade edebiliriz:

> Boş olmayan kümelerden oluşan boş olmayan bir ailenin kartezyen çarpımı boş değildir.

*Seçme Aksiyomu* matematikte önemli uygulamaları olan bir varsayımdır. Bu bakımdan, matematikçilere büyük bir çalışma konusu olmuştur.

*Kurt Gödel* (1940) Kümeler kuramının belitlerine Seçme Aksiyomunu eklediğinde dizgede bir çelişme doğmadığını; yani, Kümeler Kuramının öteki belitleriyle birlikte Seçme Aksiyomunun çelişmez bir sistem oluşturduğunu gösterdi.

*Paul Cohen* (1965) ise, Seçme Aksiyomunun, Kümeler Kuramının öteki belitlerinden bağımsız olduğunu gösterdi. Buna göre, Seçme Aksiyomunu varsayan bir Kümeler Kuramı kurulabildiği gibi, bu aksiyomu varsaymayan bir

*Kümeler Kuramı* da kurulabilir. Her iki sistem çelişmez, ama birbirlerinden farklıdır.

Matematiğin birçok probleminde doğrudan doğruya seçme aksiyomu kullanılmaz. Seçme Aksiyomu yerine ona eşdeğer olan bazı özellikler kullanılır. Gerçekte, Seçme Aksiyomunun eşdeğerleri çok sayıdadır. Ancak, biz burada çok sık kullanılan üç tanesini vermekle yetineceğiz.

**Örnek 1.5.1.** Aşağıdaki önermeler birbirlerine eşdeğerdir [13].

**Seçme Aksiyomu:** Boş olmayan kümelerden oluşan boş olmayan bir ailenin kartezyen çarpımı boş değildir.

**Hausdorff Maksimalite İlkesi:** Boş olmayan kısmi sıralanmış her küme içinde daima maksimal bir zincir vardır.

**Zorn Teoremi** Boş olmayan ve her zinciri kendi içinde bir üst sınıra sahip olan kısmi sıralanmış bir kümenin maksimal bir öğesi vardır.

**İyi Sıralama Teoremi (Zermelo)** Her küme iyi sıralanabilir.

[12], [24] , [4], [10]