Mantık, Matematik ve Felsefe II.Ulusal Sempozyumu
Tema: Kaos
Assos, 21-24 Eylül 2004

Determinizm ve Kaos

Timur Karaçay
Başkent Üniversitesi, Ankara
tkaracay@baskent.edu.tr

Özet

Adına *Kaos Kuramı* denilebilecek bir kuram oluştu mu? Bu soruya *"evet"* yanıtını vermek için zamanın henüz erken olduğunu söylemek yanlış olmayabilir. Çünkü, kaosu açıklayan matematiksel model(ler) henüz ortada yoktur. Ama, böyle bir kuramın doğuşu için yeterli nedenlerin ve çabaların ortaya konduğu gerçeği gözardı edilemez. Bu konuşmada, matematikçi gözüyle determinizmin ve kaosun ne olduğu açıklanacaktır.

Giriş

İnsanoğlunu tarih boyunca çok uğraştıran doğa olayları vardır. *Hareket* ve *zaman* bunların başında gelir. Mekaniğin amacı evreni açıklamaktır. Evreni açıklamak demek bir yandan uzak gök cisimlerinin (güneş sistemleri, galaksiler) hareketini, öte yandan atom altı parçacıkların hareketini, beri yandan yanıbaşımızdaki cisimlerin hareketini açıklamak demektir. *Hareket*'ten söz edince, işin içine ister istemez *zaman* kavramı da girecektir. Ne yazık ki, evrendeki bütün hareketleri açıklayabilen bir (tek) *mekanik kuram* olmadığı gibi, herkesin kabul edebileceği bir *zaman* kavramı da yoktur. Yakın çevremizdeki hareketleri *Newton Mekaniği* ile, atom altı parçacıkların hareketlerini *Kuantum Mekaniği* ile galaksilerin hareketini de *Görelilik (relativite) Kuramı* ile açıklamaya çalışıyoruz. Bütün bunları açıklayan bir (tek) mekanik kuramın ortaya konması, her iyi fizikçinin hayallerini süsleyegelmiştir.

Bu gün *kaos* diye nitelenen fenomenler hareket kavramıyla doğrudan ilişkilidir. 17.yüzyıldan sonra gelişen modern bilim, hareketi açıklama yönünde çok yol almıştır. Ama doğanın bütün gizlerini açıklamaktan çok uzaktayız. Biraz geriye bakarak bu yolda yürünen büyük mesafeyi görmek, bundan sonra yürünecek yol için umut ve cesaret verecektir.

MÖ 300 yıllarında *Aristoteles (MÖ 384-322)*, bir çok alanda yaptığı gibi, hareket için de gözlemlerine dayalı kurallar koymuştur. Konumuzla ilgili olan ikisi şunlardır.

1. *Cisimler ağırlıklarıyla orantılı bir ivmeyle yere düşerler.*
2. *Bir cismin hareket etmesi için ona sürekli bir kuvvet etki etmelidir.*

Aristoteles'in (yanlış) mekanik kuralları, bu gün bile fizik bilmeyen her insanın sezgiyle ulaştığı sonuçlardır. El arabasıyla inşaata malzeme taşıyan işçinin ya da sabanına koşulu öküzlerle tarlasını süren çiftçinin hareketi başka türlü algılaması zordur. Aristoteles'in kuralları, günlük yaşama ve algılamalarımıza o kadar uygundur ki, sokaktaki insan 1800 yıl boyunca ondan şüphe bile etmemiştir. Ama bilim adamlarının işi şüpheyle, sorgulamayla ve gözlemle başlar. Eğer bir cismin hareketi için ona sürekli kuvvet uygulamak gerekiyorsa, gök cisimlerini kim itiyor veya çekiyor? Dalından düşen elmayı yere iten veya çeken şey nedir? MS 150 yıllarında Claudius Ptolemy (MS 90-168)'nin gök cisimlerinin hareketi için koyduğu kurallar katolik kilisesinin resmi görüşüyle uyuşunca 16.yüzyıla kadar yerküremiz evrenin merkezi (geocentric universe) olma onurunu taşımıştır. Günün birinde Nicolaus Copernicus (1473-1543) adlı Polonyalı ortaya çıktı ve çıplak gözle yaptığı uzun gözlemlerden sonra gerçekle yüzyüze gelmemizi sağladı. O andan sonra, yerküremiz taşımakta olduğu payeyi güneşe kaptırdı. Artık, evrenin merkezi dünya değil, güneştir (*heliocentric* Universe). Bu devrimci düşünce Johann Kepler (1571-1630) tarafından geometrik modeline oturtulmuştur:

1. *Bir gezegenin yörüngesi, bir odağında güneşin yer aldığı bir elipstir.*
2. *Gezegeni güneşe birleştiren doğru eşit zamanlarda eşit alanlar süpürür.*
3. *Gezegenin periyodunun karesi güneşe olan ortalama uzaklığının küpü ile orantılıdır. (Dünya için $T^2 = R^3$.)*

Kepler'in, bu gün bile geçerliğini koruyan mükemmel geometrik modeli, güneş sistemi içindeki gezegenlerin hareketlerini kusursuz açıklıyordu ama evrendeki bütün hareketleri ve en önemlisi hareketlerin nedenini açıklamaya yetmiyordu. Dolayısıyla bilim adamlarının hareketle ilgili daha pek çok soruyu kendi kendilerine sormaları gerekiyordu. Galileo Galilei (1564-1642) bu soruyu kendi kendisine soruyor ve bir yandan teleskopla gök cisimlerini gözleyip Copernicusu'un güneş merkezli teorisini doğrularken, öte yandan yerçekimi ile ilgili deneyleri Aristoteles'in 2000 yıllık imparatorluğunu derinden sarsıyordu:

Bütün cisimler aynı ivmeyle yere düşerler.

Bu kural, ağır cisimlerin de hafif cisimlerle aynı ivmeyle yere düştüğünü söylüyor ve Aristoteles'in yukarıda anılan ilk yasasını çürütüyordu. Tarih göstermiştir ki, büyük imparatorluklar derinden sarsılınca yıkılmaları kaçınılmazdır. Galilei'nin sarstığı Aristoteles'in imparatorluğuna *Isaac Newton (1642-1727)* son darbeyi indirecektir. *Newton Hareket Yasaları* denen aşağıdaki kurallar, Aristoteles'in imparatorluğunu yıkmakla kalmadı, 400 yıl boyunca fiziksel bilimlerin temeli oldu ve yaşadığımız çağın teknolojisini yarattı:

1. *Hareketli bir cisim dışarıdan bir kuvvetle etkilenmezse düzgün doğrusal hareketini ilelebet sürdürür.*
2. *Kütlesi m olan bir cisme uygulanan F kuvveti ile a ivmesi arasında F=ma bağıntısı vardır.*
3. *Her etkiye karşı ona eşit bir tepki vardır.*

Bilgi üretiminde asla tahmin edilemeyecek ilişkiler ortaya çıkar. Kepler gezegenlerin hareketlerini açıklayan geometrik modeli yaratmak için Pergeli *Apollonius (MÖ 262-190)*'un 1800 yıl önce yazdığı *Konikler* adlı yapıtına dayanıyordu. Herhalde, Apollonius, tutkulu bir sanatçı gibi koniklerin gizlerini bulup ortaya dökerken, 18 yüzyıl yıl sonra büyük bir uygarlığa çığır açacağını aklına bile getirmiyordu. Apollonius olmasa Kepler olmazdı, Kepler olmasa Newton olmazdı.

Newton, Kepler'in mükemmel geometrik modelinin ve Galilei'nin yerçekimi ile ilgili şaşırtıcı gözleminin gerisinde yatan gizemi aramaya başladı. Gezegenler neden Kepler'in modeliyle hareket ederler? Ağır ve hafif cisimler neden aynı ivmeyle yere düşerler? Bu soruların yanıtlarını veren matematiksel bir formül varolmalıydı. Sonunda aradığını buldu. Newton'un hareket yasaları, biraz sonra ele alacağımız *determinizm* kavramının temelidir. Newton'dan sonra 20.yüzyıl başlayana dek, hareketle ilgili her şeyin Newton'un hareket yasalarından çıktığına inanılacaktır.

Dinamik Sistemler

Basit hareketleri temsil eden diferensiyel denklemler ya da denklem sistemleri genellikle doğrusal (linear) dır. Bunların genel çözümü, analitik fonksiyonlardan oluşan bir uzaydır. Bu uzaya sistemin *çözüm uzayı* diyoruz. Analitik çözümün bulunması demek, ele alınan fiziksel sistemin tamamen bilinmesi demektir. Bunun nasıl olduğunu biraz sonra açıklayacağız.

Öte yandan, fiziksel sistem karmaşıklaştıkça, onu temsil eden diferensiyel denklemlerdeki değişkenlerin sayıları (boyut) artar; yani sistem çok değişkenli olur. Ayrıca denklemdeki terimlerin dereceleri yükselir; yani sistem nonlinear olur. Genellikle, bu tip denklemlerin analitik bir çözüm uzayı yoktur. Bu olgu, *kaos* diye adlandırılan fenomenleri alışılmış matematik diliyle açıklayamayışımızın asıl nedenidir.

Analitik çözümü bulunamayan fiziksel sistemlerin hareketlerini inceleyebilmek için, analitik çözümlerde kullandığımız araçların genelleştirilmesi ilk akla gelmesi gereken iştir. *Çözüm uzayı* yerine *evre uzayını* koymak bu işlerden birisidir.

Fiziksel sistemler için *evre, evre uzayı* ve *dinamik sistem* kavramları, ele alınan sisteme bağlı olarak farklı tanımlanabilir. Burada daha karmaşık sistemlere kolayca genelleşebilen basit matematiksel tanımlar vereceğiz.

Evre *(phase, state)*: Birinci basamaktan *n* tane denklemden oluşan bir diferensiyel denklem sistemi için *evre,* sistemin anlık durumunu belirlemeye yeten serbestlik sayılarıdır. Bu sayılar

$$x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \ldots, x_n, \dot{x}_n$$

öğelerine karşılık gelir ve *2n* tanedirler. Dolayısıyla bunları *2n*-boyutlu uzayda vektörler olarak düşünebiliriz.

Evre uzayı *(phase space, state space)*: Yukarıda anılan denklem sistemi için, *2n*–boyutlu uzayda bütün mümkün evrelerin oluşturduğu uzaydır. Bu kümenin öğeleri *2n*-boyutlu vektörlerdir.

Dinamik Bağıntı *(dynamical rule)*: Sistemin bir evreden bir sonraki evreye geçişini sağlayan bağıntıdır. Bu bağıntı sistemi hareket ettiren kuraldır ve diferensiyel denklem(ler)le temsil edilir.

Dinamik Sistem: Bir evre uzayı ile bir dinamik bağıntıdan oluşan matematiksel bir yapıdır. Örneğin, *y' = 2x , y(0) = 1* ikilisi bir dinamik sistemdir.

Doğrusal olmayan daha karmaşık sistemler için de benzer tanımlar yapılır. Bir doğa olayını temsil eden dinamik sistemdeki denklemler, çözümü bulunamayacak kadar karmaşık olduğunda, evreler ancak gözlem ve ölçümlerle belirlenebilir.

Başlangıç Koşulları

MS 1500 lü yıllarda bir doğa olayını (kuralını) açıklamanın tek yolunun onu belirleyecek ölçümlerin yapılmasıyla mümkün olabileceği görüşü ortaya çıktı. Bunun anlamı açıktı: Evrenin kuralları sözel ifadeler yerine rakamlarla açıklanmalıydı. Bu görüş 17.yüzyıldan sonra gelişmeye başlayan modern bilimin temeli olmuştur. Maddenin ve doğa olaylarının açıklanması için fiziksel bilimler matematiği asıl araç olarak kullanmıştır. Örneğin, Newton yasaları sözel olarak ifade edilseler bile, bir fiziksel sistemin durumunu açıklamak için onun konumunun, hızının, yönünün ve ona etkiyen kuvvetlerin bilinmesi gerekir. Bu bilgiler sayısaldır ve onun *başlangıç koşulları'*dır.

Başlangıç koşulları deyimi, biraz daha derin anlama sahiptir. O nedenle açıklanmasına gerek vardır. Bir dinamik sistemin bir andaki konumunu, hızını, yönünü ve ona etkiyen kuvvetleri biliyor iken, onun daha sonraki ya da daha önceki bir zamandaki durumunu da bilmek istiyoruz. Doğrusal bir diferensiyel denklemin ya da denklem sisteminin çözümü analitik fonksiyonlardan oluşan bir uzaydır, demiştik. Çözüm uzayından istenen bir fonksiyonu seçmek için onu belirleyen değerleri kullanırız. Bu değerlere *başlangıç koşulları* ya da *sınır koşulları* diyoruz. Analitik çözüm varolduğunda, iyi tanımlı sınır koşulları çözüm uzayından bir tek fonksiyon seçer. Eğer denklem sistemimiz bir hareketi temsil ediyorsa, seçtiğimiz fonksiyon o hareketin yörüngesidir. Farklı başlangıç noktaları farklı fonksiyonlar seçer; yani farklı başlangıç noktaları hareketler için farklı yörüngeler belirler. Bu olgunun, biraz sonra ele alacağımız *kelebek etkisi'* yle yakın ilişkisi vardır.

Analitik çözüm uzayı varolmadığında, başlangıç koşullarıyla belli bir fonksiyon (yörünge) seçemediğimiz gibi, başlangıç koşulunu kesinlikle belirleyemeyişimiz etkisini göstermeye başlar.

Analitik çözüm uzayı olmayışının üstesinden gelmek için, evre ve evre uzayı kavramlarını kullanırız. Evre uzayı, yukarıda da belirttiğimiz gibi, çözüm uzayının rolünü üstlenecektir. Ama analitik çözüm uzayındaki deterministik sonuçlara ulaşamayız. Neden böyle olduğunu açıklayabilmek için bir kaç kavrama daha gereksememiz var. Önce onları ele alalım.

Determinizm

Biraz felsefi açıdan tanımlarsak, Klasik Mekaniğin (Newton Mekaniği) özü determinizmdir. Determinizm, *"bir fiziksel sistemin şimdiki durumu, önceki durumunun sonucudur"* der. Dolayısıyla her olay ve hareketi önceden belirlemek mümkündür. Bu görüşü, antik çağın maddeci düşünürlerine kadar geriye götürebiliriz. Hiç değilse, MS 1500 yıllarında ortaya çıkan *nedensellik (sebep-sonuç)* düşüncesinin ağırlık kazanmasından sonra Isaac Newton (1642-1727) 'un ortaya koyduğu hareketin üç temel yasası modern bilimi bütünüyle determinizme dayalı kılmıştır. Bu yasalar, determinizmi yalnız ileriye değil, geriye doğru da çalışan sağlam bir araç olarak görür. Gerçekten, Newton'un hareket yasalarına göre, şu andaki olay ve hareket önceki olay ve hareketten çıktığı gibi, bundan sonra olacak olay veya hareket de şu andaki olay veya hareketin sonucu olacaktır. Klasik fizikçi açısından, Halley kuyruklu yıldızının 2061 yılında yeniden dünyayı ziyaret edeceğini kesinlikle öngörebilmek ya da gelecek güneş tutulmasının ne zaman olacağını ve dünyanın neresinden en iyi görüneceğini şimdiden şaşmaz biçimde hesaplayabilmek, determinizmin yadsınamaz zaferidir. Modern bilimin dayanağı olan ve 400 yıldır etkisini sürdüren bu görüş, bugün içinde bulunduğumuz bilimi, teknolojiyi ve uygarlığı yaratmıştır.

Determinizmin matematiksel dili çok açıktır. Başlangıç koşullarını bilince, ona uyan biricik analitik çözümü, çözüm uzayından seçebiliriz, demiştik. Bu çözüme f diyelim. Herhangi bir t anında sistemin durumunu biliyor isek, f fonksiyonunu biliyoruz demektir. Artık her a için $f(t+a)$ ve $f(t-a)$ değerlerini hesaplamak mümkündür. Matematiksel açıdan bakınca çözüm fonksiyonunun grafiği üstünde gerçekleşen bu olgu, fiziksel açıdan bakınca söz konusu dinamik sistemin kendi yörüngesi üzerinde belli bir yerden ileriye ya da geriye doğru hareket ettirilebilmesi demektir.

Öyleyse, determinizmin uygulanabilmesi için, sistemin analitik çözümüne ve iyi belirlenmiş başlangıç koşullarına gerekseme vardır. Çok kolaymış gibi görünen bu iş, gerçekte pek çok sistem için imkansızdır. Bu imkansızlık *kaos* diye anılan fenomenleri yaratır.

Tanrı Zar Atar mı?

Newton fiziği dorukta iken, 20.yüzyıl içinde onun eksiğini tamamlamak için yapılan çalışmalarda iki yeni teori ortaya çıktı: *Kuantum Mekaniği* ve *Görelilik Kuramı.* Görelilik Kuramı, bu yazının kapsamı dışındadır. Kaos'un olasılığa dayalı yanıyla yakın ilişkisi nedeniyle, Kuantum Mekaniğine bir kaç tümce ayırmakta yarar vardır Atomun yapısını açıklamak için, atom altı parçacıkların hareketlerinin belirlenmesi gerekiyordu. Bu parçacıklara determinizm ilkesini uygulayabilmek için belli bir andaki konumlarının, hızlarının ve yönlerinin bilinmesi gerekiyordu. Ama aynı anda konumlarını ve hızlarını ölçebilme olanağı yoktu; hız bilinirse konum bilinmiyor, konum bilinirse hız bilinmiyordu. Buna çare olarak "olasılık" kuramı kullanıldı. Parçacıkların hızları ya da konumları belli olasılıklarla belirlendi. Dönemin en renkli kişilerinden Albert Einstein bu görüşe karşı durup *"Tanrının zar attığına inanamam!"* diyecektir. Ama, olayın çok inandırıcı yanı vardır. Yapılan tahmin bir parçacık için değil, milyonlarcası içindir. Bir para atıp *tura* geleceğini tahmin ederseniz, ya yüzde yüz tutturur ya da yüzde yüz yanılmış olursunuz. Ama 1.000.000 milyon para atıp 500.000 tanesinin *tura* geleceğini söylerseniz yanılma payınız çok azalır. Olasılığın kullanılışı, determinizmden bir sapıştır. Ancak, Kuantum Fiziği'nin görkemli doğuşu bile determinizmin önemini yok edemedi. Ama *"Ölçümlemede belirsizlik" (Uncertainty of Measurements)* olgusunu gündemin başına yerleştirdi.

Bütün bunlardan önce, hemen 20.yüzyıl başlarken Newton Mekaniğine duyulan güveni sarsan görüşlerin ortaya çıkışını anımsamalıyız. 1898 yılında Fransız matematikçi *Jacques Hadamard* başlangıç koşulunda bir hata yapıldığında sistemin uzun dönemde öngörülemez olacağını belirtti. 1906 yılında *Pierre Duhem* benzer yargıya vardı. Ünlü Fransız Matematikçisi ve düşünürü Henri Poincaré 1900 yılında güneş sisteminin kararlı olup olmadığının kanıtlanamayacağını gösterdi. 1908 yılında *Science et Méthode* adlı ünlü yapıtında konuyu ayrıntılarıyla işlemiştir (asıl konumuz olduğundan buna ileride yeniden değineceğiz).

Ölçümlemede Belirsizlik

Başlangıç koşulları dediğimiz sayıları nasıl belirleyeceğiz? Deneysel bilimlerde bunun tek yolu gözlemleme ve ölçümlemedir. Ama gözlemler, deneyler, ölçümler gerçek sayısal değerleri veremez; onları ancak belli bir yaklaşıklıkla, yani belli bir hatayla bulabiliriz. Her ölçümlemede kaçınılmaz olan alet ve insan hatalarını bir yana koysak bile, kuramsal olarak hiç bir alet her zaman gerçek değerleri veremez. Çünkü gerçel sayıların ondalık temsilleri sonsuz haneyi gerektirir. Sonsuz haneli bir ölçüm aleti yapılamayacağı gibi, sonsuz haneli sayılarla işlemler de yapılamaz. İrrasyonel sayı içeren basit bir toplama işleminde bile, o sayı yerine sonlu haneli yaklaşık bir değerini (rasyonel sayı) kullanırız. *Ölçümlemede Belirsizlik (Uncertainty of Measurements)* dediğimiz bu olgu, bir fiziksel sistemin başlangıç koşullarının kesin olarak belirlenemeyeceği anlamına gelir. Bu olgunun determinizm ilkesinde yarattığı olumsuzluğu saptayan ilk kişi Henri Poincaré (1854-1912) 'dir. Şimdi bunun ilginç öyküsüne geçebiliriz.

Kelebek Etkisi

Newton yasaları iki gök cisminin hareketine mükemmel uyum sağlar, ama ikiden çok cisim olduğunda analitik çözüm elde edilemez. Üç Cisim Problemi diye anılan bu problemin çözümü 20.yüzyıla girerken astronomide popüler bir konu oldu. Norveç Kralı II.Oscar, güneş sisteminin kararlı olup olmadığını ispatlayana ödül vereceğini duyurdu. Henri Poincaré 1900 yılında, güneş sisteminin hareketini belirleyen denklem sisteminin çözümünün başlangıç koşullarına hassas bağımlı olduğunu, ancak başlangıç koşullarının asla doğru olarak saptanamayacağını, dolayısıyla güneş sisteminin kararlı olup olmadığının belirlenemeyeceğini gösterdi. Bu öngörülemez (unpredictable) durum için "kaos" terimini kullanan ilk kişi de odur. Böylece, Poincaré, istenen problemi çözmeden ödülün sahibi oldu. Ama unutmamak gerekir ki, bir problemin çözülemeyeceğini kanıtlamak, bazan problem çözmekten çok daha zordur.

Şimdi Poincaré'nin büyük bulgusunun matematiksel açıdan basit açıklamasını yapabiliriz. Dinamik sistemin analitik çözümü varsa, belli bir başlangıç değeri yakınındaki değerler için fonksiyon (yörünge) değerleri de birbirine yakındır (süreklilik). Determinizm asıl gücünü buradan alır. Bu sistemlerde başlangıç koşulları kesinlikle belirlenemese bile, gerçek başlangıç değerlerine yakın değerlerin alınması sonuçta önemli farklar yaratmaz.

Analitik çözüm olmadığı zaman, çözüm yerine yerel noktalarda doğrusal yaklaşımlar kullanılır; onlardan sayısal çözümler elde edilir. O sayısal çözümler *evreleri* oluşturur. Evreler başlangıç koşulları olarak alınır. Bu nedenle, *evre uzayı* çözüm uzayı yerine geçer. Doğrusal yaklaşımlar, boyut sayısına göre teğet doğru, teğet düzlem, hiper düzlem adlarını alırlar. Çözüm analitik olmadığından, birbirine çok yakın noktalardaki teğetler birbirinden çok uzakta olabilir. Başka bir deyişle, analitik çözümlerde ortaya çıkan düzgünlük (süreklilik) koşulları sağlanmadığından, birbirine çok yakın başlangıç noktalarında bile birbirlerinden çok uzakta değerler alabilirler.

Bu kısa açıklamadan sonra, konu ile ilgilenen fizikçilerin *kaos* terimine yükledikleri anlamı ortaya koyabiliriz: *Başlangıç koşullarına hassas bağımlılık.* Fizikçilerin bunu ifade eden güzel bir deyimleri var: *"Çin'de bir kelebek kanat çırparsa Teksas'ta kasırga olabilir".* Bu sözde hiçbir politik ima olmadığını söylemeye gerek yoktur. Sadece, söylemek istedikleri şey, balangıç koşullarındaki çok küçük değişim sistemin davranışında çok büyük fark yaratabilir.

Hoşgeldin Kaos!

Aya insan indiren, Mars'a uydu gönderen ve bu hareketlerin her saniyesini önceden öngören (predict) determinizmin büyük gücünü yanımızda hissetmek hepimize huzur veriyor. Ama, bir bilardo topunun masada nereye çarpacağını hesaplayamamak, üç gün sonrasının hava durumunu doğru tahmin edememek ya da bir dünya savaşının sonuçlarını öngörememek gibi olgular, kaygı verici değilse bile, determinizmin verdiği huzura gölge düşürecek kadar hayal kırıcıdır.

Konuşma diline indirirsek, davranışı önceden öngörülemeyen (unpredictable) dinamik sistemleri ya da onların davranışlarını *kaos* olarak niteliyoruz. Fizikçilerin kaos terimine yükledikleri bu anlam ile sokaktaki adamın, hele hele politikacıların kaos terimine yükledikleri anlam çok farklıdır. Fizikçilerin söylediklerini, matematik diliyle ifade edersek kaosu daha iyi tanımlamış oluruz.

Nonlinear dinamik sistemlerin çoğu için öngörü (prediction) yapmaya engel olan üç neden vardır:

1. Sistemin analitik çözümü yoktur.
2. Herhangi bir başlangıç koşulunu kesinlikle belirleyemeyiz (*Ölçümlemede Belirsizlik İlkesi).*
3. Başlangıç koşullarında meydana gelen çok küçük değişim(ler) sonuçta çok büyük farklara neden olabilir *(Başlangıç koşullarına hassas bağımlılık – Kelebek etkisi).*

Aslında, bu üç nedeni bir tek nedene, yani birinci nedene indirgeyebiliriz. Çünkü sistemin çözümü analitik ise kelebek etkisi ortadan kalkar. Kelebek etkisi ortadan kalkınca ölçmede belirsizliğin etkisi yok olur; yani birbirine yakın başlangıç koşulları için birbirine yakın fonksiyon değerleri çıkar. Tersine olarak, sistemin analitik çözümü yoksa, yukarıda açıkladığımız nedenlerle, son ikisi doğal olarak etkili olmaya başlar.

Garip Çekerler

Poincaré 'nin 1900 yılında ortaya koyduğu kaos kavramı, meteorolojist Edward Lorenz'in 1963 yılında *meteorolojik değişimlerin başlangıç koşullarına hassas bağımlılığı* diye ifade edilen gözlemlerine kadar kimsenin ilgisini çekmedi. Çünkü fizikçiler, yirminci yüzyılın ilk yarısında daha çekici bir konuyla; yani Kuantum Fiziği ile ilgilenmeye başladılar ve Poincaré 'nin önemli buluşunu ihmal ettiler. Lorenz, Poincaré 'nin 63 yıl önceki bulgusunu ondan habersiz olarak yeniden buldu. Ele aldığı dinamik sistem için başlangıç koşullarında oluşacak küçük değişimlerin sonuca çok büyük etkiler yaptığını gözlemledi. Böylece, uzun süreli hava tahminleri yapmanın olanaksız olduğunu ortaya koydu.

Lorenz havanın ısı değişimini belirlemek için, birinci basamaktan üç tane diferansiyel denklemden oluşan

```
dx/dt = -a*x + a*y
dy/dt =  b*x - y -z*x
dz/dt = -c*z + x*y
```

sisteminin sayısal çözümü arıyordu. Sistem doğrusal değildir (nonlinear) ve akışkanlar dinamiğinde kullanılan sistemlerin basitleştirilmiş bir özel durumudur. Zamanı gösteren t değişkeni $\Delta t \approx dt$ kadar değiştiğinde, Lorenz, analiz derslerine yeni başlayan öğrencilerin bile itiraz edebilecekleri şu yaklaşık işlemleri yaptı:

```
X= x+Δx ≈ x+dx = x + (-a*x*dt) + (a*y*dt)
Y= y+Δy ≈ y+dy = y + (b*x*dt)  - (y*dt) - (z*x*dt)
Z= z+Δz ≈ z+dz = z + (-c*z*dt) + (x*y*dt)
(Başlangıç değerleri: dt = .02, a = 5, b = 15, c = 1)
```

`t` değiştikçe yeni `(X,Y,Z)` noktasının üç boyutlu uzayda çizdiği yörüngeyi bilgisayarla çizmeye başladı. Ortaya çıkan grafik, kendi kendisini hiç kesmiyor ve iki nokta civarına yığılıyordu. Bu yığılma noktalarına Lorenz Çekerleri (attractor) ya da Garip Çekerler[1] denir.

Tekrarlar (iterations)

Lorenz kaos'u yeniden keşfedince, kaos örnekleri arayanlar çoğaldı. Farklı sistemler ve farklı başlangıç koşulları için Garip Çekerler'i canlandıran bilgisayar programları yazıldı. Bu toplantı boyunca bunların örneklerini bolca görmüş olacağız. O nedenle, grafikleri burada tekrarlamayarak yer kazanacağız. Bu sistemlerin çoğu, matematik diliyle söylersek, tekrarlama (iteration) yöntemleriyle elde edilir. Bunlar arasında gündemde uzun süre kalan bazı örnekleri sıralayacağız.

Julia ve Mandelbrot Kümeleri

Gaston Maurice Julia (1893-1978), İkinci Dünya Savaşında yüzünden yaralandı. Uzun süre hastanede kaldı. Bu zamanlarda, babasının kendisine verdiği bir polinom

[1] Bu ad ilk kez Ruelle ve Takens'in bir makalesinde kullanılmıştır.

kitabını okumaya başladı. Rasyonel bir f fonksiyonu için $f^n(x) = f(f(f(\ldots f(x)\ldots)))$ değerlerini inceledi. $\{f^n(x):\ n=0,1,2,3,\ldots\}$ yörüngesi sonlu olan noktaları araştırdı ve ilginç özelliklerini buldu. Ancak, buluşları bir süre sonra unutuldu. 1973 yılında Benoit Mandelbrot (1924-…) 'un işi yeniden ele alıp karmaşık düzlemde bilgisayarla çizimler yapmasıyla, konu yeniden gündeme geldi. Julia ve Mandelbrot kümeleri arasındaki farkı, karmaşık düzlemde yaygın bir örnek olan $z \rightarrow z^2 + c$ dönüşümü üzerinde açıklayalım:

Dizisel yörüngeleri kolay göstermek için bu dönüşümü $z(n+1) = z(n)*z(n) + c$ biçiminde yazalım. Sabit bir c alındığında $\{z(n)\}$ yörüngesi sonlu olan bütün z noktalarının karmaşık düzlemde oluşturduğu $J(c)$ kümesine Julian dolgusu (Julian-filled set), bu kümenin kenarına da Julian kümesi denir. 1919 yılında G.Julia ve P.Fatou ikilisi, her dolgu kümesinin ya bağlantılı (connected) bir küme ya da bir Cantor kümesi olduğunu ispatladı.

Bağlantılı her Julia dolgusu bir *Mandelbrot kümesi*'dir. $z \rightarrow z^2 + c$ dönüşümününde $z(0)=0$ alınırsa c noktasının yörüngesi bulunur:

$$z(0) = z,$$

$$z(n+1) = z(n)*z(n) + z\ ,\quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

Bu şekilde yörüngesi sonlu olan c noktalarının oluşturduğu küme, $z \rightarrow z^2 + c$ dönüşümüne karşılık gelen Mandelbrot kümesidir. Bu küme bağlantılı bir Julian dolgusudur. Mandelbrot kümeleriyleyle ilgili bazı gerçekler:

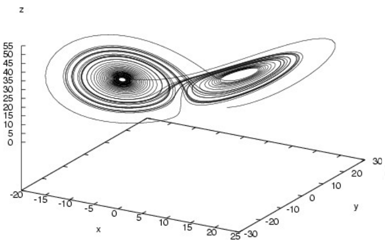
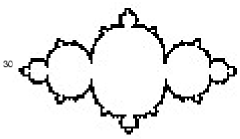
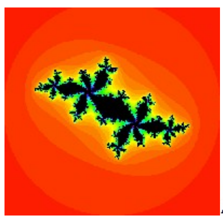
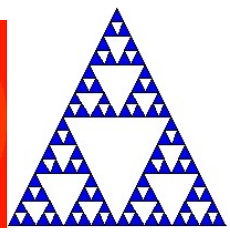
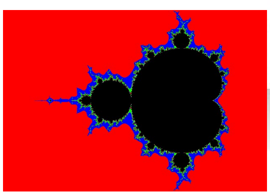
- *Mandelbrot kümesi bir fraktaldır.*
- *Mandelbrot kümesinin alanı bilinmiyor.*
- *Mandelbrot kümesinin kenar uzunluğu sonsuzdur.*
- *Kümenin kenarına yapışan ve kendisini tekrarlayan benzer şekiller sonsuz sayıdadır.*
- *Mandelbrot kümesi bağlantılıdır.*

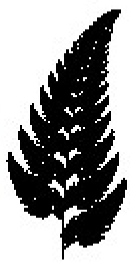
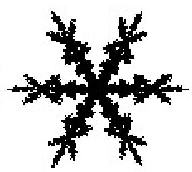
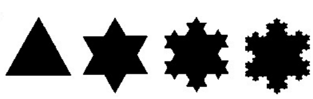
Geometrik Şekiller

Tekrarlamalarla elde edilen ilginç geometrik şekiller vardır. Sierpinski üçgeni, Menger kümesi, Cantor tozu, Koch eğrisi vb. Birbirine çok benzer algoritmalar kullanan bilgisayar grafikleriyle çok ilginç geometrik şekiller elde edilebilmektedir.

Doğanın Sanat Yapıtları

Eğrelti otu, brokoli ve benzeri bazı bitkilerin büyümeleri tekrarlamalarla (iterasyon) açıklanmaktadır.

Soldan sağa doğru: Lorenz çekerleri, Julia kümesi (San Marco Ejderhası), Julia dolgusu, Sierpinski üçgeni, Mandelbrot kümesi, Menger Kümesi, eğrelti otu, kar taneciği, Koch eğrisi

Kaosla Birlikte Matematiğe Giren Yeni Kavramlar

İterasyonla yaratılan ve kaotik sayılan bazı olgular matematiğe yeni ufuklar açtı mı? Buna şimdiden *"evet"* demek zordur. Ama kendi kendini tekrarlayan geometrik şekillerden çıkan *fractal geometri* ve *fractal boyut* kavramları alışılmış matematiğe yeni giren kavramlardır.

Geçen yüzyılın başlarında ortaya çıkan *L-sistem* adlı iterasyon yöntemi önceleri ilgi görmedi. 1950 li yıllarda Noam Chomsky doğal dillerin sözdizimine (syntax) uyguladı. 1968 yılında biyolog Aristid Lindenmayer tarafından bitkilerin büyümesini temsil etmek üzere kullanıldı. Harflerin kısa bir dizimiyle temsil edilen basit bir nesneden başlayarak çok karmaşık nesneler yaratabilen bir iterasyon yöntemidir. *L-sistem* bilgisayar desteği ile başarılı sonuçlar verebilir mi diye düşünmeye değer.

Bu kavramların matematikte yeni ufuklar açıp açamayacağını zamanla göreceğiz.

İyi-tanımlılık

Bilgisayarın olmadığı dönemlerde, iterasyon sonucu oluşan yörüngeleri elle çizmek olanaksızdı. Dolayısıyla bunların öngörülemeyen dinamik sistemler; yani kaotik sistemler olduğu sonucuna varmak doğaldı. Ama, artık bu tür iteration yöntemleriyle elde edilenlerin özelliklerini epeyce biliyoruz ve bilgisayarla grafiklerini çizebiliyoruz.

Belki, kaosu, sistemin öngörülemezliği olarak tanımlamak yetersizdir. Çünkü, bu tanıma dayanarak, geriye dönüp Kepler zamanına kadar güneş sisteminin kaotik bir yapı oluşturduğunu, ama Keplerden sonra kaotik yapıdan kurtulduğunu mu söyleyeceğiz? Tanımın yetersizliğinden olsa gerek, bazı sistemlere *"deterministik kaos"* gibi garip bir sıfat takılmıştır. Bir dinamik sistemin davranışını öngörememek başka şeydir, o sistemin davranışının öngörülemeyeceğini kanıtlamak başka bir şeydir.

Kaotik sistemler için, *"efradını cami, ayarını mani"* bir tanıma gerekseme ortaya çıkmış görünüyor.

Matematik Açısından Asıl Sorun Nedir?

Julia kümeleri, Mandelbrot kümeleri, Sierpinski üçgeni, Cantor tozu, eğrelti otu, brokoli gibi örnekleri ister kaotik sistem sayalım, ister saymayalım, asıl sorunumuz başkadır. Tekrarlamalar (iterations) ile istediğimiz kadar kaotik sistemler yaratabiliriz. Hatta kendi kendisini tekrar etmesi gerekmeyen sınırsız sayıda ardışık işlemler yaparak sistemi tamamen içinden çıkılmaz duruma getirebiliriz. Bunu şöyle bir örnekle açıklayabiliriz. Elimizde bir $y = f(x)$ fonksiyonu var olsun. Bunun birinci ve ikinci basamaktan türevlerini almayı da içeren sonlu sayıda cebirsel işlemden oluşan bir operatöre, iterasyonun bir adımı gözüyle bakalım. Bu adımları ardışık olarak uygulayarak çok karmaşık bir diferensiyel denklem üretmek kolaydır. İşlemlerden sonra ürettiğimiz denklem şöyle olsun:

$$F(x,y,y',y'') = 0$$

Şimdi, yaptığımız işlemleri unuttuğumuzu varsayalım ve başladığımız fonksiyonu yeniden bulmak isteyelim. Daha iyisi, yaptığımız işlemlerden habersiz olan birisinden bu diferensiyel denklemi çözüp yeniden $y = f(x)$ fonksiyonunu bulmasını isteyelim.

Eğer denklemimiz çözüm yöntemi bilinen bir sınıfa girmiyorsa, hiç kimse aranan fonksiyonu bulamayacaktır.

Söz gelimi, Sierpinski üçgeni sonunda düzlemde bir toz halini alacaktır. Olayın geçmişini hiç bilmeyen birisi, bu tozun bir üçgenden Sierpinski iterasyon kuralı ile elde edildiğini ispatlayabilir mi?

Bilim kurgusal bir dil kullanarak konuşalım. Bu gün belli iterasyonlarla "kaotik grafikler" çizen bilgisayarlarımız, günün birinde başkasının çizdiği "kaotik grafiklere" bakarak iterasyon kuralını ve kuralın başlangıcını çıkarmaya başlarsa matematikçileri çok mutlu edeceklerdir.

Dinamik sistemlerde istenen şey, dinamik kural dediğimiz diferensiyel denklemin (ya da denklem sisteminin) çözümünü bulmaktır. Buna matematikte tersinme (inverse) problemi diyoruz. Cebir, analiz ve diferensiyel denklem kuramlarımız çoğunlukla tersinme problemleriyle uğraşır. Çünkü, determinizmin istediği şeyleri veren odur. Öte yandan, bütün problemleri çözen bir tersinme kuralı yoktur. Bu nedenle problemler kendi içlerinde birbirine benzer sınıflara ayrılıp, her sınıf için ayrı ayrı çözüm yöntemleri geliştirilir. Örneğin, bütün diferensiyel denklemleri çözen bir tek yöntem yoktur. Bunun yerine, her diferensiyel denklem sınıfı için ayrı ayrı çözüm yöntemleri aranır. Kaotik sistemler için de benzer şeyin olması gerekir. *"Böl ve yönet"* ilkesi yalnız politikada değil, bilimsel bilgi üretiminde de geçerliği olan bir altın kuraldır.

Sonuç

Matematikçiler, Çinde kanat çırpan kelebeğin nasıl olup da Teksas'ta kasırga yaratacağını açıklayan matematiksel modelden çok, Teksasta olan kasırgayı Çin'de hangi kelebeğin hangi kanat çırpışıyla yarattığını bilmek isterler. Günün birinde kaos bir bilim olacaksa, matematikçiler o kelebeği bulmak zorundadır.

KAYNAKLAR

1. Anishchenko, Vadim S. *Dynamical Chaos.* World Scientific, 1995.
2. Aristid Lindenmayer. *Mathematical models for cellular interaction in development.* *J. Theoret. Biology,* 18:280--315, 1968.
3. Baker, Gregory L. and Gollub, Jerry B. *Chaotic Dynamics: An Introduction.* Cambridge, England: Cambridge University Press, 1990.
4. Barry Cipra. *What's Happening in the Mathematical Sciences.* Volumes 1 to 5 on the AMS Bookstore.
5. Crownover, Richard M. *Introduction to Fractals and Chaos.* Jones and Bartlett, 1995.
6. David Ruelle. *Rastlantı ve Kaos, -Chance and Chaos - ,* TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları, Ankara,1990.
7. Davis, Brian. *Exploring Chaos: Theory and Experiment.* Perseus Books, 1999.
8. Gary Mar and Patrick Grim. *Semantics of Paradox:Chaotic Liars, Fractals, and Strange Attractors.* Philosophy and Computing.
9. Hilborn, Robert C. *Chaos and Nonlinear Dynamics.* New York: Oxford University Press, 1994.
10. Ian Stewart. *Does God Play Dice? The Mathematics of Chaos.* Basil Blackwell, 1990.
11. James Gleick. *Kaos, -Chaos -.* TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları, Ankara, 1987.