

Olasılığın Temelleri

Timur Karaçay
Başkent Üniversitesi
tkaracay@baskent.edu.tr

Özet:

Matematiğin bir dalı olarak olasılık kuramının doğuşu 17.yüzyılın ortalarına raslar. 20.yüzyılda olasılığın formalizasyonu yönünde, iki önemli adım atıldı. Birincisi, 1933 yılında *Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987)* tarafından ortaya konulan aksiyomlardır. Bu aksiyomlar, olasılık kuramını, bir ölçüm uzayına taşıyor ve o zamana kadar olasılıkla ilgili yapılan bütün *discrete hesaplamaları* özel haller olarak içeren çok genel bir yapıya yükseltiyordu. İkincisi ise *Richard Threlkeld Cox (1898-1991)* tarafından ortaya konulan aksiyomlarıdır. Cox, olasılığı, daha basite indirgenemez bir ilkel (primitive) kavram olarak aldı ve onun sağladığı temel özellikleri ortaya koydu. 1960 lı yıllarda birbirlerinden habersiz olarak, Ray Solomonoff, Anrey Kolmogorov, Gregory J. Chaitin *algoritmik seçkisizlik* (randomness) kavramını ortaya attılar. Bu yeni kavram, olasılık kuramının dayandığı rasgelelik kavramına açıklık getirmekle kalmayıp, *informasyon* kuramına da yeni açılımlar getirdi. Gödel'in eksiklik teoremine benzer bir niteliğe sahip algoritmik seçkisizlik, günümüzde çok aktif bir konudur ve görünüşe göre olasılığı bulunduğu yerden alıp daha yükseklere taşıyacaktır.

Giriş

İnsanoğlu tarih öncesi zamanlardan beri seçkisiz (rasgele) fiziksel olaylarla karşı karşıyadır. Öngörülemeyen doğa olaylarını yorumlamak (gayıpten haber vermek) ve şans oyunları bunlara tipik örneklerdir. Bu tür olgular, hemen her dönemde ve her kültürde varolmuştur. Dolayısıyla, olasılık kavramının insan düşüncesinde yer edişini binlerce yıl geriye götürmek mümkündür. Ama matematiğin bir dalı olarak olasılık kuramının doğuşu 17.yüzyılın ortalarına kadar gecikmiştir. Elbette, bilim tarihinde buluşların, çoğunlukla unutulmuş ya da bilinmeyen öncülleri vardır. 1494 yılında *Fra Luca Paccioli*'nin yazdığı *Summa de aritmetica, geometria, proportioni e proportionalita* adlı kitap, olasılığı konu edinen ilk kitap olarak bilinir. Bu kitaptan esinlenen *Geronimo Cardano*, 1550 yılında *Liber de Ludo Aleae* (Şans Oyunları Üzerine bir Kitap) adlı kitabı yazdı. Ama bunlar avrupada filizlenmeye başlayan matematiğin ilgi alanına giremedi.

Olasılık Kuramının doğuşu bir kumarbazın ihtirasıyla başlar. *Chevalier de Méré* adlı soylu bir Fransız, kumar oynayarak servetini büyütmeye ihtirasına kapılmıştır. Oynadığı oyunun kuralı şudur: Bir zarı dört atışta en az bir kez 6 getiren kazanır. Ama *Chevalier* oyunun kuralını değiştirerek daha çok kazanmak istemektedir. Yeni kural şudur: Çift zarı 24 atışta bir tane düşüş (toplam $6+6=12$) getiren kazanacaktır. Ama kısa sürede, bu kuralın daha az kazandırdığını gördü. Bunun nedenini arkadaşı *Blaise Pascal (1623-1662)* 'a sordu. Pascal, o dönemin iyi matematikçilerinden biriydi. O ana kadar, matematik dünyası şans oyunlarının matematikle bir ilişkisi olduğunu bilmiyordu. Pascal, kendisine sorulan sorunun yanıtını, bir matematikçi gözüyle araştırdı. Sonunda basit ama kesin çözümü ortaya koydu. Eski kuralda *Chevalier* 'in kazanma şansı %51.8 iken yeni kuralda %49.1 idi. *Chevalier* 'in kaybetme nedeni buydu.

Pascal, bu basit problemi çözmekle yetinmedi. Sorunun gerisinde daha büyük bir matematik kuramın yattığını anlamıştı. Çağdaşı *Pierre de Fermat* ile mektuplaşarak fikir alışverişinde bulunmaya başladı. Sonunda, matematiğin önemli bir dalı olan Olasılık Kuramını yarattılar. Bu gün, olasılık kuramı, şans oyunlarına uygulanma özeliğini çoktan aşmış bilim, endüstri, ekonomi, spor, yönetim gibi çağdaş insanın yaşamını etkileyen her alana girmiştir. Örneğin bankacılık, sigortacılık, endüstride kalite kontrolü, genetik, gazların kinetik teorisi, istatistiksel mekanik, kuantum mekaniği gibi pek çok alan olasılık kuramı olmadan ayakta duramaz.

Olasılık Kuramını geliştiren önemli matematikçilerden bazıları şunlardır:

Blaise Pascal (1623-1662), Pierre de Fermat (1601-1665), Christiaan Huygens (1629-1695), Jakob Bernoulli (1645-1705), Abraham de Moivre (1667-1754), Daniel Bernoulli (1700-1782), Comte de Buffon (1707-1788), Pierre-Simon Laplace (1749-1827), Augustus De Morgan (1806-1871), Thomas Bayes (1702-1761), Andrei Andreyvich Markov (1856-1922), Richard von Mises (1883-1953).

Modern zamanlarda, olasılığın yönelişlerinde önemli katkıları olan Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903 – 1987) , Richard Threlkeld Cox (1898- 1991) , *Ray Solomonoff* (1926 - ...) ve Gregory J. Chaitin'in yaptıklarından aşağıda kısaca sözedeceğiz.

Kavramlar

En basit anlamıyla, olasılık, bir süreçte gelecekte ne olacağını tahmin etme eylemidir. Ama, biz, olasılıktan bundan fazlasını bekleriz. Olasılık, tahmin ettiği şeye ne kadar güvenebileceğinin de ölçüsünü vermelidir. *Gaipten haber vermek* ile olasılık bilimi arasındaki önemli fark buradan gelir. Bunu başka türlü söylersek, olasılık belirsizliğin (uncertainty) ölçüsüdür.

Klasik anlamda, olasılık ile seçkisizlik (randomness) eşanlamlıdır. Seçkisiz bir süreçte, olayların (çıktıların) olma olasılıkları birbirlerine eşittir. Başka bir deyişle, bir süreçte **seçkisizlik** “*amaç, neden, sıra ve öngörü yokluğu*” diye tanımlanabilir. Bu nedenle, seçkisiz süreç, çıktısı öngörülebilir bir biçime (pattern) sahip olmayan ardışık oluşumlar zinciridir. Özel olarak, istatistikte, yanlı (bias) olmayan ya da bağlantılı (correlated) olmayan olayları belirlemek için kullanılır. İstatistiksel seçkisizlik, daha sonraları bilgi kuramında *informasyon entropisi* kavramı içine alınmıştır.

Zaman içerisinde olasılığa yüklenen kavramlar giderek çeşitlenmiştir. Hatta, klasik olasılık aksiyomlarının dışına taşan olasılık kuramları da vardır. Dolayısıyla, olasılığın tam bir sınıflandırmasını yapmak zordur. Biz, burada, olasılık aksiyomları içinde kalan olasılığın günümüzdeki asıl akış mecrasına bakmaya çalışacağız.

Seçkisizliğin Uygulamaları

Seçkisizlik kavramı, başlangıçta şans oyunlarından çıkmıştır. Örneğin zar atma, rulet oyunu, oyun kartlarını karma vb. Daha sonra yapılan elektronik kumar makinalarında da seçkisiz sayı üretimi için esastır. Ama bu işte çok hile yapılabileceği için, bu tür oyun makinaları bir çok ülkede ya yasaklıdır ya da devletin sıkı denetimi altındadır. Bizde olduğu gibi, bazı ülkelerde, seçkisiz sayı üretimine dayalı piyangolar ülke genelinde serbestçe oynanabilir. Bundan farklı olarak, çıktısı önceden öngörülemez spor karşılaşmaları, at yarışları vb. oyunlar da seçkisizliğin (olasılığın) ilgi alanındadır.

19.yüzyılda fizikçiler gazların özelliklerini ve termodinamik kurallarını açıklamak için olasılığa dayalı istatistiksel mekanik kullandılar. Kuantum mekaniğinde olasılık kullanılmaktadır. Evrim Kuramı, farklı canlı türlerinin oluşumunu, mutasyonun seçkisizliğine bağlar. İletişim kuramında seçkisizlik gürültü (noise) diye adlandırılır. Gürültü, nedenli olarak

belirlenen dizinler dışında kalan dizinlerdir. *Seçkisizlik* kavramı ile *öngörülemezlik* kavramlarının bazı örtüşen yanları olsa bile, esasta birbirlerinden farklıdır. Örneğin, şifrelenmiş bir mesaj, nedensel olarak sıralanmış bir dizidir ve şifre anahtarına sahip kişi tarafından çözülebilir. Ama bu anahtara sahip olmayan başka birisi için, öngörülemez içerikli bir dizidir. Böyle bir dizi seçkisiz değildir. Kutsal kitaplarda evrenin ve canlıların doğaüstü bir güç tarafından istençle yaratılmış olmaları varsayımı ile doğadaki seçkisizlik arasında bağdaşamaz çelişkiler vardır. Bu çelişkileri gidermeye çalışan din bilginlerinin başarı sağladığı söylenemez.

Seçkisiz Sayı Üretimi

Olasılık kavramının geçtiği her yerde, olabilecek olayları sayılarla ifade etmek mümkündür. Dolayısıyla, konu, esasında seçkisiz sayı üretimine dayalıdır. Stephan Wolfram' a göre, seçkisiz sayı üretme işi üç ayrı sınıfa ayrılabilir. Bu üç sınıfta üretilen sayıların nitelikleri birbirlerinden farklıdır.

1. *Çevreden gelen seçkisizlik*. Örneğin, çoğalmayı açıklayan hareket (Brownian motion).
2. *Başlangıç koşullarına hassas bağlı seçkisizlik*. Örneğin, kaos.
3. *Sözdes seçkisizlik*. Bu sayılar tasarlanan bir sistem tarafından üretilir. Örneğin, bir bilgisayarla üretilen seçkisiz sayılar... Bu tür sayılar belli bir algoritma ile üretilir. Algoritma çok ağır hesaplamalara dayandırılarak, çıktı hiç kimsenin öngöremeyeceği duruma kolayca getirilebilir. Ama üretilen sayılar gerçek anlamıyla seçkisiz sayılamaz.

Felsefi Bakış

Felsefi açıdan bakıldığında, belirsizlik (uncertainty), iki önemli dala ayrılır. Birinci tür belirsizlikte, olayın oluşu tamamen seçkisizdir, önceden öngörülemez. İkinci tür belirsizlik ise olay hakkındaki bilgi eksikliğimizden doğar. Birinci tür belirsizlikle ilgili olasılığa *aleatorik olasılık*, ikinci tür belirsizlikle ilgili olasılığa da *epistemik olasılık* denir. Bu ikisi arasındaki önemli farkı bilmeliyiz.

Aleatorik (seçkisiz) belirsizlik: Bu tür belirsizlik, olayları seçkisiz biçimde olduran bir neden (cause, fenomen) varolduğu varsayımına dayanır. Örneğin, bir para attığımızda tura gelme olasılığının $\frac{1}{2}$ ve yazı gelme olasılığının da $\frac{1}{2}$ olduğunu söyleriz. Parayı ne kadar atarsak atalım, kim atarsa atsın, bu olasılıklar değişmez ve birbirlerine eşittirler. Kesinlikle, seçkisizdirler; bilgi ya da deneyle bu olasılıklar değiştirilemez. Oyun kağıdı destesinden bir kart çekme, rulet oyunu, zar atma gibi olayların hepsi (hilesiz olmaları koşuluyla) seçkisiz belirsizliklerdir. İstatistik dersleri, genellikle bu tür (aleatorik) olasılıkları inceler.

Epistemik (bilgisel) belirsizlik: Bu tür belirsizlik, olayları yaratan nedenler (fenomen) hakkındaki bilgi eksikliğimizden doğar. Onlar hakkında bilgi edindikçe, belirsizlik azalır ve tam bilgi edindiğimizde belirsizlik yok olur. Bunu şu örnekle açıklayalım. Bir torbaya beyaz ve siyah tavla pulları doldurulmuş olsun. Torbada kaç tane pul olduğunu, kaçının beyaz, kaçının siyah olduğunu bilmiyoruz olalım. Torbadan bir pul çektiğimizde siyah mı, beyaz mı olacağını bize bildiren bir bilgi ve deney olmadığını varsayalım. Bu durumda çektiğimiz pulun beyaz olma olasılığı $[0,1]$ aralığında bir sayıdır. Sözelimi, bu olasılığın da $\frac{1}{2}$ olduğunu söyleyebiliriz. Ama burada yaptığımız tahmin, yukarıdaki *tura gelme* olasılığı gibi seçkisiz değildir; hiç bir nesnel nedene dayanmaz. Arka arkaya pul çekmeye devam ettikçe, torba içindeki pulların renkleri hakkında daha fazla bilgi edinmeye başlarız. Çektiğimiz beyaz pulların sayısını, çektiğimiz siyah pulların sayısıyla karşılaştırarak, bir sonraki pulun beyaz olma olasılığını daha iyi tahmin etmeye başlarız. Sonunda bütün pulları bitirdiğimizde, pulların sayıları ve renkleri hakkında kesin bilgilere sahip oluruz. Bu olaydaki belirsizlik, bilgi eksikliğimiz giderildikçe azalmakta ve giderek ortadan kalkmaktadır.

Epistemik belirsizliğe çok örnek verilebilir. Örneğin, Ankara'nın nüfusunu bilmeyen iki kişiden birincisi nüfusun 2 milyon, ikincisi 3 milyon olduğunu tahmin edebilir. Bu tahminler birer epistemik olasılıktır. Birinci kişi, Devlet İstatistik Enstitüsünden Ankara'nın nüfusunu tam öğrenebilir ve bu konudaki belirsizliği kendisi için ortadan kaldırabilir. Ama ikincisi, bunu öğrenmezse, onun için belirsizlik devam edecektir. Buradan anlaşıldığı üzere, epistemik belirsizlik, kişiye bağlıdır, ama aleatorik belirsizlik kişiye bağlı değildir.

Acaba?

Bu konuyu geçmeden önce, bu iki belirsizlikle ilgili bir felsefi tartışmaya dikkat çekmek gerekiyor. Bir parayı attığımızda, onun yazı ya da tura gelmesi tamamen ona etki eden fiziksel kuvvetlerin bileşkesinin sonucudur. Biz, bu günkü bilgilerimizle (ya da araçlarımızla), atılan paraya etki eden fiziksel kuvvetleri eksiksiz hesaplayamıyoruz. O nedenle, yazı mı yoksa tura mı geleceğini bilemiyoruz ve bu olayı seçkisiz diye niteliyoruz. Eğer, günün birinde, atılan paraya etki eden bütün kuvvetler hesaplanabilir hale gelirse, bu olay seçkisiz olmaktan çıkacaktır. Bu düşüncüyü genelleştirirsek, hiç bir olay nedensiz oluşmaz. Öyleyse seçkisiz olay yoktur. Bütün aleatorik belirsizlikler, esasta epistemiktirler.

Akla kolayca yatan bu düşüncenin yaşama geçebilmesi için, fizikçilerin yürüyeceği daha çok yol olduğu apaçıktır. Ama matematikçiler o kadar sabırlı değildirler, o yola çoktan düşmüşlerdir. Bu yazının, bundan sonraki konusu bu olacaktır.

Olasılığın Formalleşmesi

Başta Blaise Pascal olmak üzere olasılık kuramını başlatan 17.yüzyıl matematikçileri, olasılık hesaplarında sonlu "combinatoric" hesaplama yöntemlerini geliştirdiler. 20.yüzyılın başlarından itibaren, matematiğin hemen her dalı kümeler kuramına dayandırılarak daha soyut ve daha sağlam ayaklar üzerine, yani aksiyomlar üzerine oturtulmaya başlandı. Olasılık bu gelişimin dışında kalamazdı. Olasılığın formalizasyonu yönünde, bu gün de geçerli olan iki önemli adım atıldı.

Birincisi, 1933 yılında *Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987)* tarafından ortaya konulan aksiyomlardır. Bu aksiyomlar, olasılık kuramını, bir ölçüm uzayına taşıyor ve o zamana kadar olasılıkla ilgili yapılan bütün *discrete hesaplamaları* özel haller olarak içeren çok genel bir yapıya yükseltiyordu.

İkincisi ise *Richard Threlkeld Cox (1898-1991)* tarafından ortaya konulan aksiyomlardır. Cox, olasılığı, daha basite indirgenemez bir ilkel (primitive) kavram olarak alıyor ve onun sağladığı temel özellikleri ortaya koyuyor.

Kurgu yöntemleri farklı olmakla birlikte, Kolmogorov ile Cox tarafından ortaya konulan yapılar pratik uygulamalarda birbirlerine denktirler. Aradaki önemli fark Cox olasılığının sonlu toplamsal, Kolmogorov olasılığının ise sigma toplamsal (sayılabilir sonsuz toplamsal) oluşudur.

Olasılık yasaları

1. Bir olayın olma olasılığı $[0,1]$ aralığında bir sayıdır. 0 olasılığı olayın olamazlığını, 1 ise kesin olurluğunu belirtir.
2. Bir olayın olabilirliği ile olamazlığının olasılıklarının toplamı daima 1 dir.
3. İki olayın birlikte olma olasılığı, birincinin olma olasılığı ile ikincinin birinci olayla birlikte olma olasılığının çarpımına eşittir.

Bu yasaların matematiksel ifadeleri, p olasılık fonksiyonu, A olay, A^c onun tümleyeni olmak üzere, aşağıdaki bağıntılarla verilir.

1. $0 \leq p(A) \leq 1$
2. $p(A^c) = 1 - p(A)$
3. $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A)$

Dağılım

Olaylar (ya da önermeler) üzerinde tanımlı ve bir olayın kaç kez olduğunu gösteren bir fonksiyondur. Olasılığın bir uygulaması olan istatistikte önem taşır.

Yeni Arayışlar

Buraya kadar yapılanlar olasılık kuramını önemli bir dalı olarak ortaya koyuyor. Ama, konu üzerindeki tartışmalar sürmektedir. Olasılık dediğimiz şey neyi ifade ediyor? *Bayesçiler*, buna şu yanıtı veriyor: Belirsizliğin olduğu her mantıksal önermede olasılığı kullanırız. Buna karşıt görüşte olanlar, yani *frekansçılar* ise şu tezi savunuyor: Olasılık yalnızca seçkisiz olaylara (aleatorik belirsizliğe) uygulanır. Tabii, böyle iki karşıt görüş olunca, uzlaştırıcı olduğunu savunan çok sayıda karma görüş ortaya çıkmaktadır. Öyleyse, matematik, konuyu biraz daha yukarıdan görmeye başlamalıdır.

Seçkisizliğe Sağlam Temeller Atma

Yukarıda seçkisizliği (randomness), bir süreçte “*amaç, neden, sıra ve öngörü yokluğu*” diye tanımlamıştık. Bu tanım oldukça sezgiseldir ve matematikçileri tatmin edecek açıklığa sahip değildir.

1960 yılında *Solomonoff*, bilimsel teorinin basit bir açıklamasını vermeye uğraşırken, *algoritmik olasılık* kavramını ilk ortaya atan kişidir. Bundan 5 yıl sonra, Solomonoff’dan ve birbirlerinden habersiz olarak *Kolmogorov* ve *Chaitin* aynı algoritmik seçkisizlik kavramını ortaya koydular. Kolmogorov o zamanının en ünlü matematikçilerinden birisidir, Chaitin ise henüz üniversitede matematik bölümü son sınıf öğrencisidir. Bu öğrencinin, daha sonra yaptığı çalışmalar olasılığa ve bilgi teorisine büyük katkılar sağlayacaktır. Şimdi, bu üçünün birbirlerinden habersiz olarak ortaya koydukları “*algoritmik seçkisizlik*” ya da “*algoritmik olasılık*” kavramını açıklama hazırlığına başlayabiliriz. Konuya Chaitin’in örnekleriyle anlatmaya girelim.

Örnek 1. Dünyadaki Uzay Merkezi (UM) çok uzaktaki bir gezegene bir araştırmacı göndermiştir. Dalgın araştırmacımız, yapacağı hesaplar için kendisine mutlaka gerekli olan trigonometri cetvelini yanına almayı unutmuştur ve onun bir iletişim aracıyla kendisine acele gönderilmesini istemektedir. Bu uzak gezegenle telgraf, telefon, faks vb iletişim araçlarıyla iletilen mesajların çok pahalıdır. UM, pahalı iletişim ücretini ödemeyi göze alarak, *sin*, *cos*, *tan*, *cot*, *sec*, *cosec* fonksiyonları için hazırlanmış, yirmi haneli geniş bir trigonometri cetvelini bir iletişim aracıyla ile göndermek zorunda kalmıştır. Ama UM’de bir matematikçi varsa, işi çok ucuza getirebilir. Koca bir kitap olan trigonometri cetvelini göndermek yerine, $exp(ix) = \cos x + i \sin x$ formülünü göndermesi sorunu çözecektir. Bu kısa mesaj, araştırmacının istediği bütün bilgiyi içermektedir.

Örnek 2. Aradan binlerce yıl geçmiş olsun. Bilginimiz yorulmuştur ve hobilerine biraz zaman ayırmak için geçmiş yıllara ait basketbol maçlarını, skorları ve kimin hangi maçta kaç sayı yaptığını bilmek istemektedir. UM bu isteği çok haklı görmüş ve istenen bilgilerin gönderilmesini emretmiştir. Bu kez, matematikçiler de dahil olmak üzere, hiç kimse istenen maçlarla ilgili bilgileri tamamen içeren daha kısa bir mesaj (formül) yazamamıştır. Çaresiz, yüksek ücretler ödenerek, istenen bilgi gönderilecektir.

Bu iki örnekten çıkardığımız sonuç şudur. Bazı mesajları, anlamını aynen koruyarak, kısaltabiliriz. Bazı mesajları asla kısaltamayız.

Algoritmik Seçkisizlik tanımı, yukarıda verilen tanımda olduğu gibi insan sezgisine dayalı olmasın diye bilgisayar terminolojisine dayandırılacaktır. Günümüz bilgisayarları ikili (binary) sayıtlama dizgesine dayanır. İkili (binary) sayıtlama dizgesinde yalnızca 0 ve 1 sayakları (digit) vardır. Bilgisayar terminolojisinde ikili sayı sistemindeki hanelere *bit* denir. Bir bit'te (hanede) ya 0 ya da 1 sayağı yer alır.

İkili sayı dizgesini kullanarak her bilgiyi (mesajı) karşı tarafa gönderebiliriz. Başka bir deyişle, 0 ile 1 lerden oluşan dizilerle istediğimiz her bilgiyi yazabiliriz. Bunun için, örneğin, bir dildeki harfleri, kelimeleri, cümleleri, kavramları,... vb 0 ile 1 lerin belirli bir sırada sıralanmasıyla oluşan birer diziye karşılık getirmek yetecektir. Diziler sonlu ya da sonsuz olabilir. Mesajın ne kadar uzağa gideceğinin ve mesajın anlamının, şu andaki hedefimiz için bir önemi yoktur. O nedenle, mesajları 0 ile 1 lerden oluşan diziler olarak, uzak gezegeni de bilgisayarın çıktısı olarak düşüneceğiz. Amacımız, mesajın (dizinin) bilgisayar çıktısı olarak elde edilmesidir. O zaman mesajı yerine iletilmiş varsayacağız. Mesajı iletmek için, bilgisayara komutlar vermeliyiz. Verilecek komutlar herhangi bir bilgisayar dilinde yazılmış bir programdır. Biz buna *algoritma* diyeceğiz. Fiziksel kısıtlamaları yok sayıp, mesajın gönderilmesi için gerekli zamanın olduğunu ve algoritma doğru ise mesajın daima yerine ulaştığını varsayalım.

Bir parayı 20 kez atalım. Yazı gelince 0, tura gelince 1 yazalım. Tesadüfen aşağıdaki dizi oluşsun.

01010101010101010101 (1)

Para atma olayını tekrarlayalım. Bu kez tesadüfen aşağıdaki dizi oluşsun.

01101100110111100010 (2)

Birinci dizi (mesaj) '01' in on kez ardışık yazılmasından oluşmuştur. İkinci dizi (mesaj) ise, onu daha kısa ifade edecek bir biçime (pattern) sahip değildir.

Bu iki dizinin bir insanda ve bir bilgisayarda yarattığı etkiye bakalım. Azıcık eğitilmiş ve biçimleri (pattern) algılayabilecek yetenekteki her insan, birinci dizinin istençle oluşturulmuş (seçkili) bir dizi, ikincinin ise rasgele oluşturulmuş (seçkisiz) bir dizi olduğu izlenimini edinir. Oysa bilgisayar bu farkı görmeyecektir. Esasta, her ikisi de bir paranın 20 kez atılmasıyla oluşturulabilecek 2^{20} (= 1 048 576) seçenekten birer tanesidir. Her ikisinin yazı-tura ile oluşturulması olasılıkları aynıdır ve 2^{-20} dir.

Klasik olasılığın dayandığı rasgelelik (seçkisizlik) her ikisinde aynı olduğu halde, biz insanlar, başka bilgi ve deneyimlerimizle, bu iki dizinin oluşturuluşunu farklı imiş gibi seziyoruz. Bize göre, birinci dizi istençle (seçkili) oluşturulmuştur, ikinci dizi ise rasgele (seçkisiz) oluşturulmuştur. Bu insanın yanılığısıdır. Oysa, bilgisayar bu yanılığa düşmüyor, dizilerin oluşturuluşu hakkında bir yorum yapmıyor.

Bilgilerimize ya da sezgilerimize dayalı olarak bir dizi hakkında vereceğimiz *seçkili/seçkisiz* kararlarımızın ne kadar yanıltıcı olabileceğine bir çok örnek gösterebiliriz. Örneğin, 3,1451... dizisini gören iki kişi düşünelim. Bunlardan birisi *pi* sayısını biliyor olsun, ötekisi bilmiyor olsun. Birinci kişi bu diziyi istençle yazılmış (seçkili) bir dizi olarak, yani *pi* sayısı olarak algılamak, ikinci kişi bunu tamamen rasgele dizilmiş (seçkisiz) bir dizi olarak görebilir.

Görülüyor ki klasik seçkisizlik (randomness) tanımımız kişiden kişiye değişebilmektedir. Diziyi gören kişinin önceki bilgilerine, deneyimlerine ve 'pattern'leri

seçebilme yeteneğine bağlıdır. Böylesine kişiye bağlı seçkisizlik (randomness) kavramına dayalı olasılık kuramının önemli bir açığı olduğunu kabul edip, bu açığı kapatacak sağlam bir kurgu aramalıyız.

Algoritmik Olasılık

Tekrar baştaki dizilere dönelim. Birinci diziyi (mesajı) iletmek için "on kez 01 yaz" algoritması bilgisayara yetecektir. [*Tabii, kullanılan dile göre, bu algoritma bir for döngüsü, while döngüsü vb olabilir. O ayrıntının önemi yok. Konuşma dilinde yazdığımız algoritmanın bilgisayar tarafından anlaşıldığını varsayacağız.*] İkinci diziyi (mesajı) iletmek için "01101100110111100010 yaz" algoritmasından başka bir yol bulamıyoruz. Bu algoritma, esas mesajdan daha kısa değildir.

Şimdi mesajların 20 bit değil, 20 katrilyon bit olduğunu, birinci mesajda 01 lerin ardışık dizildiğini, ama ikinci mesajdaki 0 ve 1 lerin rasgele dizildiğini, algılanabilir bir pattern olmadığını varsayalım. O zaman birinci mesajı iletmek için "on katrilyon kez 01 yaz" algoritması yeterlidir. Ama ikinci mesaj için, 20 katrilyon biti olduğu gibi içeren "01101100110111100010... yaz" algoritmasından başka bir algoritma bulamıyoruz. Bit sayısı arttıkça, algoritmanın uzunluğu ona koşut olarak artmaktadır. Başka bir deyişle, mesajı yazdıran algoritma mesajdan kısa olamamaktadır.

Bilimsel Teori Nedir?

Konuya açıklık getirmek için bir örnekle başlayalım. İnsanoğlu varoluşundan beri gök cisimlerinin hareketlerini merak etmiş, o hareketleri gözlemiştir. *Batlamyus, al Sufi, Uluğ Bey* ve daha yüzlercesi gözlem sonuçlarını kataloglar halinde yazmışlardır. Örneğin, *Batlamyus*'un kataloğunu ele alalım. Bu katalog, gök haritasında gezegenlerin ve diğer yıldızların koordinatlarını zamana bağlı olarak belirten sayılardan ibarettir. Henüz gezegenlerin güneş etrafında elips yörüngeler çizdiğinin bilinmediği çok eski zamanlardayız. Yalnızca çıplak gözle yapılan gözlem sonuçlarının yer aldığı bu katalogdaki veriler, elbette çok duyarlı değildir. Ama, o veriler *Batlamyus*'un bize iletmek istediği bilgidir (mesaj). *Batlamyus*, binlerce sayıdan oluşan bu katalogu önümüze koyarsa, çoğumuz o verilerden hiç bir şey anlamayız. O nedenle, *Batlamyus*, o katalogun içerdiği bilgiyi yorumlayıp bir teori olarak bize sunmalıdır. Gerçekten, *Batlamyus*, katalogun içerdiği verileri yorumlamış ve *yerküre merkezli evren* modelini kurmuştur. Bu bir teoridir. Bu teori *Kopernik*'e kadar ayakta kaldı. *Kopernik*, kendisinden önce yapılan gözlemlere, teleskopla yaptığı kendi gözlemlerini de katarak, *Batlamyus*'un teorisini çürüttü ve güneş merkezli evren modelini kurdu. Bu modelde, gezegenler güneş merkezli çember yörüngeler çizer. Bu da bir teoridir. Sonunda, *Kepler*, bütün gözlem sonuçlarını yeniden yorumlayarak, gezegenlerin güneş odaklı birer elips yörüngede dolaştıkları görüşünü ortaya koydu. Bu da bir teoridir. Bu teoriyi kullanarak, gezegenlerin ne zaman nerede olduklarını hesaplayabiliyoruz. Başka bir deyişle, teori, bize gözlem sonuçlarını geri veriyor.

Görüldüğü gibi, gözlemlerden ya da deneylerden elde edilen verilerin tablolar halinde yazılması bir teori yaratmıyor. Söz konusu ham verilerin yorumlanarak, herkesin anlayacağı kısa bir dille anlatılması gerekiyor. O da yetmiyor, teorinin gelecekte olacaklar hakkında bilgi içermesi gerekiyor. Gezegenin yörüngesini biliyorsam, onun ne zaman nerede olacağını hesaplayabiliyorum. Bu iş, *kehanetten* çok farklı bir şeydir. Bunlar olduğunda, ham veriler bir teoriye dönüşmüş oluyor. Elbette, toplanan verilerin duyarlılığı, kullanılan gözlem/deney aletlerinin gelişmişliğine bağlı olduğu gibi, verilerin yorumlanması da bilim adamının bilgi ve yetenekleriyle sınırlıdır. Şu anda, bir teorinin doğru ya da yanlışlığı amacımız için önem taşımıyor. Yanlış teoriler, nasıl olsa, bir gün bilimsel bilgilerin biriktiği ambardan atılacaktır.

Bilimin gücü burada yatar. Bilimin bilgi ambarı çok dinamiktir, yanlış olduğu kanıtlanan teoriler hemen yerlerini yeni teorilere kendiliğinden bırakırlar.

Şimdi, bir teori kurma olgusunu algoritmik seçkisizlik kavramıyla ifade edeceğiz. Algoritmik seçkisizlik tanımını vermeden önce, Solomonoff'un bilimsel teoriyi açıklamak için kullandığı “*inductive inference*” yönteminden söz etmeliyiz. Bilim adamı bir sürü deney/gözlem yapar. Bunları bitlerden oluşan bir dizi (mesaj) olarak düşünelim. Bilim adamı bu mesajı iletmek istemektedir. Bu mesajı gönderen en az bir tane algoritma vardır ve o da dizinin kendisidir. Bundan başka algoritmalar da olabilir. Bilim adamı mesajı gönderen bir algoritma kurmuş olsun. Algoritma, ilettiği mesajdan kısa değilse bir teori olamaz. Algoritma ilettiği mesajdan daha kısa ise, diziyi aynen iletmekle kalmayıp gelecek gözlemler için de öngörü yapıyorsa, bu algoritma bir teoridir. Bu koşulu sağlayan birden çok algoritma varsa, daima en kısa (bit sayısı en az) olan algoritma tercih edilir. Bu tercih **Occam's razor** diye bilinir: *Aynı işi yapan teoriler arasında en basiti tercih edilmelidir.*

Algoritmik Seçkisizlik: Yukarıdaki örneklerden hareketle, Chaitin ve Kolmogorov, seçkisiz diziyi şöyle tanımladılar:

Kendisinden daha kısa bir algoritma ile yazılamayan dizi seçkisizdir.

Bu tanım, sezgisel kavrama dayalı olasılık kuramını sağlam bir temel üzerine taşımaktadır. Elbette, seçkisizliğin bu yeni tanımı, olasılık kuramının aksiyomlarını yoketmiyor, olasılığın hiç bir uygulamasını değiştirmiyor, yalnızca temeli sağlamlaştırıyor. Olasılık açısından peşinde olduğumuz şey, gözlemlerden çıkan seçkisiz bir $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dizisi verilmişken, bir sonraki terimin, yani x_{n+1} teriminin ne olacağını öngörebilmektir. $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dizisini ileten ve x_{n+1} teriminin ne olacağını öngören ve diziden kısa olan algoritma bir teoridir.

Kolmogorov Karmaşıklığı (complexity)

Verilen bir diziyi ileten sonsuz sayıda algoritma kurulabilir. Örneğin, “*233 e 1 ekle*”, “*235 ten 1 çıkar*”, “*117 yi 2 ile çarp*” gibi algoritmaların hepsi 234 dizisini iletir. Bu tür algoritmalardan sonsuz sayıda yazılabileceği açıktır. Bizim için ilginç olanı en küçük olanıdır. Aynı diziyi ileten algoritmalar arasında en kısa olana **minimal algoritma** diyeceğiz. Bir dizi için bir tane minimal algoritma olabileceği gibi, bir çok minimal algoritma da olabilir.

İlettiği dizi ister seçkili, ister seçkisiz olsun minimal bir algoritmanın kendisi daima seçkisiz olmak zorundadır. Aksi takdirde, onu ileten daha kısa bir algoritma var olur ve dolayısıyla söz konusu algoritma minimal olamaz.

Karakterlerden (harf ve simgeler) oluşan bir s stringi düşünelim. s stringini yazdıran bir **P** programına s stringini iletiyor diyelim. **P** nin uzunluğu, **P** içindeki karakterlerin sayısıdır.

s stringini ileten en kısa P programının uzunluğuna S stringinin karmaşıklığı denir.

s stringini, yukarıdakiler gibi bitlerden oluşan bir dizi olarak düşünürsek, bu dizinin karmaşıklığı o diziyi ileten minimal algoritmanın uzunluğuna eşit olur. Buradan, seçkisizlik için şu denk tanımı elde ederiz:

Bit sayısı Kolmogorov karmaşıklığına eşit olan dizi seçkisizdir.

Tabii, buradaki *eşitlik* yaklaşıklık anlamındadır. Dizilerin bit sayıları çok çok büyüdüğünde, aradaki farkın önemi kalmamaktadır. Kolmogorov karmaşası, seçkisizliği tanımlamakla kalmıyor, seçkisizliğin ölçümünü de veriyor.

Seçkisiz Sayıların Çokluğu

Algoritmik seçkisizliği açıklayan yöntemimiz seçkisiz sayıların çokluğu hakkında da bilgi verir. 0 ya da 1 sayaklarının dizideki dağılım frekansları önemli ipucu olabilirler.

s dizisi bitlerden oluşan bir dizi olsun. s nin *algoritmik karmaşıklığı*, onu ileten minimal algoritmanın uzunluğu idi. Öyleyse, onu ileten bir algoritmanın uzunluğu s nin algoritmik karmaşıklığından daha küçük olamaz.

Bazı dizilerde tekrarlanan patternler olabilir. d dizisi s içinde periyodik olarak tekrarlanan bir altdizi olsun. Örneğin, $s = 010101010101010101$ dizisi $d = 01$ altdizisinin 10 kez tekrarlanmasıyla oluşmuştur. $P = "n \text{ kez } d \text{ yaz}"$ algoritması s dizisini ileten algoritmalarından birisidir. Ohalde, s dizisinin algoritmik karmaşıklığı, P algoritmasının uzunluğundan büyük olamaz. Asıl amacımız, P nin uzunluğu ile s dizisinin bit uzunluğunu karşılaştırmaktır. Bu karşılaştırma bize, s dizisinin seçkisiz olup olmadığı konusunda bir ölçü verecektir.

Önce P algoritmasının uzunluğunu irdeleyelim. n sayısının algoritmik karmaşıklığı yaklaşık olarak $\log_2 n$ dir. Yaklaşık diyoruz, çünkü algoritmanın gerçek uzunluğu kullanılan makina diline bağlıdır. Yeterince büyük n sayıları için $\log_2 n$ sayısı n sayısından çok küçüktür, dolayısıyla algoritmanın uzunluğu s dizisinin uzunluğu ile karşılaştırılırken görece olarak ihmal edilebilir. Geriye kalan "*kez*" ve "*yaz*" stringlerinin uzunluğu zaten yok denilecek kadardır, onlar da ihmal edilebilir. Ohalde, $P = "n \text{ kez } d \text{ yaz}"$ algoritmasının uzunluğunu, s dizisinin uzunluğu ile karşılaştırırken belirleyici olan tek etmenin d dizisinin uzunluğu (bit sayısı) olduğu sonucuna varırız.

Buradan yola çıkarak n bit uzunluğundaki dizilerin algoritmik karmaşıklıklarını $n-1$, $n-10$, $n-100$, $n-1000$, ... gibi sınıflara ayırabiliriz. Artık P nin uzunluğu ile d nin uzunluğunu yaklaşık eşit sayarak, aşağıdaki inductive yöntemi uygulayabiliriz.

Uzunluğu 1 olmak üzere n bitlik dizi ileten kaç tane algoritma vardır? "*n kez 0 yaz*" ve "*n kez 1 yaz*" algoritmaları bu işi yapan iki algoritmadır. Birincisi $000...0$ dizisini, ikincisi ise $111...1$ dizisini iletir. Bu algoritmaların ilkinde d dizisi yalnızca ' 0 ' dan, ikincisinde ise yalnızca ' 1 ' den ibarettir. Her ikisinin de uzunluğu 1 bittir. Bir bitlik başka algoritma yoktur. 1 bitlik algoritmaların sayısını 2^1 biçiminde gösterebiliriz. Benzer olarak, 0 ile 1 sayaklarından elde edilecek 2 bitlik dizilerin sayısı 4 dür: 00 , 10 , 11 , 10 . Ohalde, İki bitlik algoritmaların sayısı 2^2 dir. Benzer düşünüşle, üç bitlik algoritmaların sayısı 2^3 , ... , $n-11$ bitlik algoritmaların sayısı 2^{n-11} olacaktır. Bunların toplamı $(2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-11}) = 2^{n-10} - 2$ dir. Demek ki, uzunluğu $n-10$ dan az olan algoritmaların sayısı 2^{n-10} dan daha azdır. Öte yandan n bit uzunluğundaki dizilerin sayısı 2^n dir. Görüldüğü gibi, bunlar arasında ancak 2^{n-10} tanesinin algoritmik karmaşıklığı $n-10$ dan küçüktür. $2^{n-10} / 2^n = 1 / 1024$ olduğuna göre, 1024 diziden ancak 1 tanesinin algoritmik karmaşası $n-10$ dan küçüktür. Bundan anlaşılıyor ki seçkili sayılar çok seyrek, sayıların çoğunluğu seçkisizdir.

Yukarıda yaptıklarımızdan şu sonuç çıkmaktadır: Bir dizi verildiğinde onun seçkili olduğunu göstermek için, diziyi ileten ve diziden daha kısa olan bir algoritma olduğunu göstermek yetecektir. Bulunacak bu algoritmanın minimal olması gerekmiyor. Ama bir dizinin seçkisiz olduğunu göstermek için onu ileten daha kısa bir algoritmanın var olmadığını göstermek gerekir.

Formal Sistemler

Gödel'in formal sistemler için ispatladığı eksiklik teoreminin benzerinin seçkisiz sayılar için de geçerli olduğu gösterilmiştir. Chaitin'in yaptığı bu işin önemini anlayabilmek için, formal sistemlerden söz etmemiz gerekiyor.

20.yüzyılın başında Georg Cantor (1845-1918)'un ortaya koyduğu kümeler kuramı, matematikte bir devrim yarattı! Bundan sonra matematiğin temelleri kümeler üzerine kurulmalıydı!.. İşin doğası olarak, matematikçiler şu soruya yanıt arıyordu:

“Geçerli bir ispat nedir? Bir ispatın geçerli olduğunu nasıl anlayacağız?”

Bu sorunun yanıtı, matematiğin temellerinde aranmalıydı. Ne varki, bu temeller kazıldıkça ortaya paradokslar çıkıyordu. Sağlam temeller oluşturmak yönünde yapılan çalışmaları üç okula ayırabiliriz: *Mantıksallık, sezgisellik ve biçimsellik*.

Mantıksallık: Russel ve Whitehead matematiğin temellerinde oluşan boşlukları yoketmek için matematiği mantığın içine almaya çalıştılar. 1910-1913 yıllarında yayımlanan üç ciltlik *Principia Mathematica* adlı yapıtta bütün matematiğin mantıksallığa (logicism) indirgenebileceğini savundular. Modern matematiksel mantığın doğmasına yol açan *Principia Mathematica*, Aristotle'in *Organon* adlı ünlü yapıtından sonra, mantık alanında yazılmış en önemli yapıt sayılır.

Sezgisellik (intuitionism): Matematiği sezgisel olarak kurmayı amaçlayan bu okul esas olarak Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966)'in ortaya koyduğu sistemdir. Cantor'un kümeler kuramına dayalı yapıyı şiddetle yadsırken, Russell'in usbilimselliğine de karşı durur.

Biçimsellik (formalism): 1927 yılında David Hilbert (1862-1943), adına *Kanıt Kuramı (Proof Theory)* dediği formal bir matematik dili kurdu. Bu dilin sonlu bir alfabesi, apaçık bir grameri, sonlu sayıda aksiyomları, teoremleri elde etmek için sonlu sayıda çıkarım kuralları (lojik ve aritmetik kurallar) vardı. Böyle bir sisteme *formal sistem* denir.

Bir formal sistemde iki önemli nitelik istenir.

1. Tamlık (completeness): İçindeki her teorem kanıtlanabiliyorsa sistem tamdır. Başka bir deyişle, sistemdeki her p önermesi için ya ' p doğrudur' ya da ' p yanlıştır' teoremlerinden biri kanıtlanabiliyorsa M sistemi tamdır.
2. Tutarlılık (çelişkisizlik, consistency): M sistemindeki her p önermesi için ya ' p doğrudur' ya da ' p yanlıştır' teoremlerinden ancak birisi geçerliyse M sistemi tutarlı, her ikisi aynı anda varsa M sistemi tutarsızdır.

Kaleyi Yıkan Adam!

Matematik Dünyası, o zamanın dahi matematikçisi Hilbert'in inşa ettiği formal yapıdan hiç kuşku duymadı. Bu formal sistemi matematikteki krizi tamamen çözen bir yapı, sağlam bir kale gibi görüyordu. Ta ki, 1931 yılında Kurt Gödel (1906 -1978) bir fiskeyle Hilbert'in kalesini yerle bir edene kadar... O zamana kadar kimse Hilbert'in yanılmış olabileceğini düşünmüyordu. Gödel, bir formal sistem içinde ispatlanamayan doğru bir önerme olduğunu gösterdi. Bu sonuç, bir formal sistemin tam olup olmadığının o sistem içinde kanıtlanamayacağını söylüyor, dolayısıyla, Hilbert formalizmini yıkıyordu.

Kaleyi fetheden *Kurt Gödel*, Aristoteles'ten sonra gelmiş en büyük mantıkçı ününü kazanacaktır. Gödel'in kaleyi yıkan ispatı, Giritli Epimenides'in ünlü paradoksuna dayanır. Epimenides,

“Bütün Giritliler yalancıdır.”

der. Kendisi de Giritli olduğuna göre, acaba Epimenides'in bu söylemi doğru mu, yoksa yanlış mı? Mantıktaki basit çıkarım kuralıyla şu sonuca ulaşıyoruz: Söylemi doğru kabul

edersek söylemin yalılışı çıkar. Söylemi yanlış kabul edersek, söylemin doğruluğu çıkar. Bu söylemi, daha basit biçime dönüştürebiliriz:

“Bu söylediğim şey yanlıştır.”

Gödel, bu paradoksu dahice kullandı. Önce formal sistem içinde, sistemin kurallarına uyarak pozitif tamsayılarla ilgili doğru bir önerme kurdu. “Doğru” kavramı yerine “ispatlanabilir” kavramını koyarak, kurduğu doğru bir önermenin sistem içinde ispatlanamadığını gösterdi.

Bir formal sistem içerisinde bir önermenin ispatlanması demek, sistemin aksiyomlarına ve çıkarım kurallarına (aritmetik kurallar) uyularak o önermenin doğruluğunun gösterilmesi demektir. 1937 yılında, Alan Turing, bir mantıksal sistem içerisinde hesaplanabilir (computable) her işlemi yapan bir algoritma (bilgisayar programı) olduğunu göstermiştir. Bu algoritmaya Turing Makinası diyoruz. Bazan buna, ‘mekanik işlemlerle ispat’ da denir. Turing Makinası metalden yapılmış bir araç değil, hesabı (computation) yapan bir bilgisayar programıdır. O halde, bir sistem içinde bir önermenin doğruluğunun gösterilebilmesi ile o işi yapan bir algoritmanın (Turing Makinası) var olmasını denk sayacağız. Hemen belirtelim ki, Turing, Gödel’in eksiklik teoremini daha genel olarak kanıtlamıştır: Bir formal sistemde ancak sayılabilir sayıda teoremi ispatlayan algoritma kurulabilir. Sayılamayan sonsuz sayıda teoremin ispatı için algoritma kurulamaz. Bu genelleme nedeniyle, Turing’in yaptığı işin, Gödel’in yaptığı işten çok daha büyük olduğunu söyleyen matematikçiler vardır. Ama, bilimsel gelişme böyledir. Gödel olmasa, belki Turing olmazdı. O nedenle, biz, Gödel’in hakkını Gödel’e vermekten yanayız.

Buraya kadar söylediklerimizden şu sonucu çıkarabiliriz: Bir formal sistemde yalnız mantık ve aritmetik işlemler içeren *recursive* süreçle ispatı yapan/denetleyen bir algoritma vardır. Daha ileri giderek, Hilbert zamanında olmayan bir şeyi bu gün yapabiliriz. İspatı yapan/denetleyen algoritmayı bilgisayarda çalıştırabiliriz.

Bununla da yetinmeyerek, en azından kuramsal olarak, şunu da düşünebiliriz. Formal sistemimizde ispatlanabilecek bütün teoremleri listeleyebiliriz. Bunu yapmak için, ilk adımda, sistemde bir karakter (harf diyelim) uzunluğundaki bütün sembolleri sözlük sırasına dizelim. Sonra her birine ispat algoritmasını uygulayalım. Bu işin sonunda, eğer varsa, bir karakterden oluşan bütün teoremleri elde ederiz. İkinci adımda, benzer işi iki karakter uzunluğundaki sembolere uygulayarak iki karakter uzunluğundaki bütün teoremleri listeleyelim. Üçüncü, dördüncü, ... adımları atmaya devam edelim. Bu işin sonunda, ispatlanabilen bütün teoremleri uzunluklarına göre sıralamış oluruz. Tabii, bu eylemde kuramsal düşünüyor, işi bitirmek için gerekli zamanın olduğunu kabul ediyor ve fiziksel bir kısıt öngörmüyoruz.

Turing Makinasını kullanırsak, Gödel’in algoritma yaratmak için giriştiği zor ve uzun işlemlerden kurtuluruz. Dolayısıyla, eksiklik teoreminin çok kısa ve zarif ispatları ortaya çıkar. Aşağıda, bunlardan ikisi verilmiştir.

1. Yöntem. Doğal sayılardan oluşan ama hiç bir algoritma tarafından numaralanamayan (sayılamayan) bir küme oluşturan aşağıdaki ispat yöntemi, gerçel sayıların sayılamazlığını göstermek için Cantoru’un kullandığı köşegen yönteminden esinlenmiştir ve Russel’in berber paradoksuna dayanmaktadır.

Doğal sayı (alt)kümelerini numaralayan bütün programların P kümesini düşünelim. Bu programların kümesini numaralayabiliriz: $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_r, \dots\}$ olsun. Bu programların çıktıları doğal sayılardır. Bazı programların çıktısı içinde kendi numaraları vardır, bazılarında yoktur. Örneğin, P ye ait bir p_r programının çıktısı içinde r sayısı varsa, bu program kendi numarasını numaralıyor, değilse numaralamıyor olacaktır. Kendi numarasını numaralamayan bütün programların numaralarından oluşan K kümesini düşünelim. Bunun K ’ tümleyeni kendi

numarasını numaralayan bütün programların numaralarından oluşan kümedir. Numarası K da olan bütün programların kümesine P_K , bunun P ye göre tümleyenine de $P_{K'}$ diyelim.

$$P = P_K \cup P_{K'}, \quad P_K \cap P_{K'} = \phi$$

olacaktır. K kümesini numaralayan bir algoritma var mı? K kümesini numaralayan bir p_k programı varsa, bu program P içindeki programlardan birisidir. Öyleyse, ya P_K kümesine ya da $P_{K'}$ tümleyenine ait olacaktır. Öte yandan,

$$p_k \in P_K \Leftrightarrow k \notin K \Leftrightarrow k \in K' \Leftrightarrow p_k \in P_{K'}$$

olur. Bu bir çelişkidir. Bu çelişkiyi yaratan neden, başta yaptığımız kabuldür; yani K kümesini numaralayan bir p_k programı var kabul edilmişti. Sistemimizde çelişkiye yer veremeyeceğimize göre, bu kabulü yapamayız. O halde, doğal sayıların bir altkümesi olan K kümesini numaralayan (sayan) bir program yoktur. Oysa K doğal sayıların bir alt kümesi olduğu için numaralanabilir (sayılabilir) bir kümedir. Ama onu sayan bir algoritma yoktur. Algoritma yoktur demek, formal sistemimiz içinde K kümesi sayılamıyor demektir.

2. Yöntem. Eğer kendi zamanında Turing Makinası biliniyor olsaydı, Gödel, eksiklik teoremini şöyle ispatlardı:

1. Her soruyu doğru yanıtlayan bir makina var olsun. Buna Evrensel Turing Makinası (ETM) diyelim. Bunu, metalden yapılmış bir araç değil, bir algoritma olarak algılayacağız. Bu makinanın tasarımı çok karmaşık olabilir, ama daima sonlu işlem sonunda doğru yanıtı ulaşılmaktadır. Başka bir deyişle, formal sistem içinde her doğruyu ispatlayan bir algoritmadır.
2. Gödel, ETM' e onun yapısıyla ilgili bir soru sorsun. Makina bunun yanıtını bir algoritma ile verecektir. Bu algoritma, ETM'in kendi algoritmasının bir fonksiyonu olacağı için, Gödel'in sorusuna verilecek yanıtı $P(ETM)$ algoritmasıyla göstereyim. Bu da yeni bir Turing Makinasıdır.
3. Karşısındaki akıllı makinayla küçük bir oyun oynamaya hazırlanan Gödel, yüzünde kendinden emin bir gülümsemeyle şu tümceyi yazar: "*P(ETM) bu cümleye asla doğrudur demez.*" Kısalık adına, bu cümleye G diyelim. O zaman Gödel'in cümlesi bir önerme olarak şöyle yazılabilir

$$G: \text{"ETM asla } G \text{ ye doğrudur demez."} \quad (*)$$

4. Gödel son hamlesini yaparak, ETM'e G nin doğru olup olmadığını sorar ve rakibini mat etmek üzere olan usta satranççı edasıyla geriye yaslanıp bekler.
5. Bundan sonra biraz dikkat isteyen mantıksal çıkarımları izleyebilmek için, (*) ifadesinde G nin iki farklı yerde yer aldığına dikkat edelim. Birisi ifadenin başındaki G , ötekisi tırnak içinde yazılan cümledeki G . Bu iki G birbirinin aynısıdır.
6. Eğer ETM, (*) ifadesinin başında olan tırnak dışındaki G yi kastederek, "*G doğrudur*" derse, tırnak içindeki ifade doğru olacaktır. Tırnak içindeki ifadenin doğru olması için, tırnak içindeki G nin yanlış olması gerekir. O halde ETM, G ye "*doğrudur*" dediğinde G ye "*yanlıştır*" demiş olur.
7. Eğer ETM, (*) ifadesinin başında olan tırnak dışındaki G yi kastederek, "*G yanlıştır*" derse, tırnak içindeki ifade yanlış olacaktır. Tırnak içindeki ifadenin yanlış olması için, tırnak içindeki G nin doğru olması gerekir. O halde ETM, G ye "*yanlıştır*" dediğinde G ye "*doğrudur*" demiş olur.

Bu oyunda, biz G nin ne olduğunu çok iyi açıklamadan biraz bulanık ifade kullandık. Gödel, bu oyunu oynasaydı, 1931 yılında yaptığı gibi, G yerine yanıtını iyi bildiği bir

matematiksel ifade koyacak, $P(ETM)$ yerine de, kendisinin oluşturduğu ve ancak G doğru olduğunda çözümü var olan karmaşık bir polinom koyacaktı.

Gödel, formal sistem içinde doğru olduğunu bildiği bir soruyu ETM (Evrensel Doğruluk Makinası)'e soruyor, yanıt alamıyor. Demek ki, ETM, Gödel'den daha akıllı değil, diyerek kendimize bir pay çıkaramayız. Çünkü, ETM ile yer değiştirecek olsak, biz onun durumuna düşeriz. Burada çıkan sonuç, bizim ETM'den akıllı oluşumuz değil, sistemde giderilmesi olanaksız olan kalıtsal eksikliklerdir. Bu basit oyunun gerisinde, bilim dünyasının bilgiye bakışını değiştiren çok önemli bir sonuç yatar: *Her formal sistemde ispatlanamayacak doğrular vardır.*

Chaitin, bu önemli sonucu olasılık kuramına taşımıştır:

Seçkisizliği ispatlanamayan seçkisiz sayılar vardır.

Bu sonuç, olasılıkta ve informasyon teorisinde önemli sonuçlar doğurmaktadır.

Kaynaklar

1. G.Chaitin, "Algorithmic Information Theory", IBM Journal of Research and Development. 21 (1977), pp. 350-359, 496.
2. R. T. Cox, "Probability, Frequency, and Reasonable Expectation", *Am. Jour. Phys.*, 14, 1-13, (1946).
3. R. T. Cox, "The Algebra of Probable Inference", Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, (1961).
4. Terrence L. Fine, "Theories of Probability; An examination of foundations", Academic Press, New York, (1973).
5. R. J. Solomonoff, "A Formal Theory of Inductive Inference", *Info.Control* 7, 1, 224 (1964).
6. R. J. Solomonoff, "A Preliminary Report on a General Theory of Inductive Inference" (Revision of Report V-131, Feb 4, 1960), Contract AF 49(639)-376, Report ZTB-138, Zator Co., Cambridge, Mass., Nov, 1960.
7. R. J. Solomonoff, "The Discovery of Algorithmic Probability," *Journal of Computer and System Sciences*, Vol. 55, No. 1, pp. 73-88, August 1997.
8. Li, M. and Vitanyi, P., "An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications", Springer-Verlag, N.Y., 1997.