20.Yüzyılda Bilimi Sarsan Düşünceler
ve
Henri Poincaré

Başkent Üniversitesi

tkaracay@baskent.edu.tr

ÖZET

19-uncu yüzyılın son çeyreğinden başlayıp 20-inci yüzyılın ortalarına kadar süren dönemde bilime va matematiğe ciddi eleştiriler yöneltildi. Bu eleştiriler, bilimi yadsımak için yapılmadı. Bilimin ne olduğu ve güvenirliğini konu aldı. Bu tartışmalar arasında ahlâkı bilimsel temellere oturtma hevesleri de oldu. Tabii, her zaman olduğu gibi bilimi denetim altına alma istekleri geri durmadı. Bu yazıda esas olarak bu konular hakkında büyük Fransız matematikçi *Henri Poincaré* 'nin bazı düşünceleri açıklanacaktır.

Anahtar Sözcükler: Bilim, metafizik, din, ahlâk.

Giriş

Altı bin yılda insanoğlunun yarattığı en büyük düşünce yapıtı olan matematiğin temellerinin ne olduğu konusu, özellikle, 20-inci yüzyılın ilk yarısında büyük tartışmalara neden olmuştur. Bu tartışmalarda, hiç biri ötekine üstün sayılamayacak üç okul ortaya çıktı. Bu okullar ve savları kısaca şöyledir:

Sezgisellik: Matematik insan aklının eseridir. Sayılar, peri masallarındaki kahramanlar gibi yalnızca aklın yaratısıdır. Eğer insan aklı olmasaydı, onlar asla var olmayacaklardı. Bu görüşün en büyük temsilcisi Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1882-1966) dir.

Formalizm: Matematik bir dildir, onun bir dilden ne fazlası ne de eksiği vardır. Bu görüşün temsilcisi sayılan David Hilbert (1862-1943) 'e göre, matematik, basitçe, simgelerle oynanan bir oyundur. Matematiğin bütün teoremleri, Formal Lojik kullanılarak Aksiyomatik Kümeler Kuramından elde edilebilir.

Platonizm: Sayılar, insan aklından bağımsız olarak var olmak zorunda olan soyut varlıklardır. Matematiksel varlıklar hakkındaki doğruları insan aklı keşfeder. Matematiğin temelleri aksiyomlar değil, matematiksel nesnelerin gerçek dünyasıdır. O nedenle tabiatın kanunları ile matematiğin kanunları aynı statüdedir. Bu düşüncenin en önemli temsilcileri Bertrand Russel ve Kurt Gödel (1906-1978) dir.

Bu okullara ve öğretmenlerine geçmeden önce, bilimin eleştirisine kısaca değinmek gerekiyor. Çünkü, okulları yaratan şey biraz da bu eleştiridir.

Bilimin Eleştirisi

Antik Çağ'da başlayan düşünce hareketleri olgunluk dönemine ulaştığında, Hristiyanlığın yayılmaya başlamasıyla birdenbire kesildi. İnsan düşüncesinde oluşan bu çöl ortamı yeniden doğuşa (Rönesans 14.yy-17.yy) kadar sürdü. Bilindiği gibi antik çağda maddeyi inceleyen İyonyalı filozoflara *"fizikçiler"* adı verilmiştir. Daha sonra Elealı filozofların ve *Eflatun*'un maddenin varlığından şüpheye düştüklerini görüyoruz. Onlara göre madde bir görünüşten başka bir şey değildir. Rönesansla birlikte başlayan düşünce üretimi felsefede olduğu gibi bilim hayatında da büyük gelişmelere yol açtı. Antik çağda felsefenin esas konularından birisi olan *"madde"* problemi fizik dalında bilimsel yöntemlerle yeniden ele alındı. Bu dönemin fiziği maddede olup biten her şeyin matematiksel açıklamasını yapmak istiyordu. *Descartes*'in takipçileri olan mekanist fizikçiler, maddeyi, uzayda bir yer kaplayan geometrik bir cisim olarak görürken, *Leibniz* ve *Newton* maddeye dinamik bir anlam verdiler. Mekanistler ile dinamistler arasındaki fikir ayrılığı "kuvvet" kavramının ortaya çıkmasıyla ortak bir nokta yakalayabildiler.

Fizikteki yeni buluşlar tartışmalara daima verimli boyutlar ekledi. Termodinamik bulgusu ortaya çıkınca, her şeyi harekete indirgeyen klasik fiziğin yetmezliği ortaya sürüldü. Onun yerine termodinamiğin ilkelerini de içine alan "enerji fiziği" kavramına girildi. 1824 yılında *Carnot,* termik makinalarda işin ısıya dönüştüğünü ispatladı. 1847 yılında *Jules* ve *Mayer* ısının işe eşdeğer olduğunu gösterdiler. Arkasından *enerjinin sakımı yasası* ortaya çıktı.

Tabii bütün bu bulguların ortaya çıkış sürecinde idealizm, realizm, materyalizm, sipiritualizm, mekanizm ve dinamizm gibi terimlerle ifade edilen felsefi tartışmalar hararetle sürdü. Bu tartışmalar doğal olarak şu soruyu gündeme soktu:

> "-Bilimin söyledikleri güvenli midir? Bilim bize maddenin kendisi hakkında gerçek bilgiyi verebiliyor mu? Eğer fizik, eşya hakkında güvenilir bilgiye sahip değilse, veya onun hakkında bir şey bilmiyorsa, dine ve metafiziğe kapı neden açılmasın?"

Elbette bu kuşkuyu duyan gerçek bilim adamlarından ayrı olarak, bu kuşkuyu yaymakta kendileri için fayda ve hatta zorunluluk gören inanç kurumları eksik değildi. Bilimi ve bilimsel düşünceyi cephe alan bu akım kesintisiz süregelmiştir. Bilimin her şeyi açıklamaya hiçbir zaman muktedir olamayacağını savunarak, yaratılış teorisini (aslında bir teori değil) toplumlarda egemen kılan bu görüş günümüzde postmodernizm ve akıllı tasarımcı diye adlandırılan görüşlerin savunucusudur.

Metafizik ve dinsel eğilimlerin reel dünyayı açıklama konusundaki açmazları yanında, çağdaş teknolojinin insanlara sunduğu kolaylık ve refah, her şeye rağmen, toplumlarda bilime olan güveni giderek pekiştirdi. Ülkeler bilim politikaları ürettiler, eğitimde bilimi öne koydular. Bilim, artık, pragmatizmin yerini aldı. Deney ve gözlem sonuçları teorilere dönüşmeye başladı. Pozitivist ya da maddeci esasları aşan bu anlayış, ister istemez felsefeyi de etkiledi. Metafiziğe ve inançlara karşı koyan düşünce akımları güç kazandı. *Laplace*'den başlayan bu akım bu gün *determinizm* denilen ve matematik kesinliğe dayanan bilimsel kuramı ortaya koydu. Tabii, bunun bir karşı görüş yaratması kaçınılmazdı. Bilimsel tanımların felsefi yorumunu yapan fizikçi *Pierre Duhem*, matematikçi *Eduard Le Roy* fiziğin de matematik gibi sembolik bir dil olduğunu ileri sürdüler. Dolayısıyla, eşyanın kalitesine takılmadan, nesneleri daha açık, daha basit ve aklın kavrayabileceği bir dil ile ifade etmek gerektiğini ileri sürdüler. Bu arayış *John Locke*'un nesneleri birinci ve ikinci kalitedekiler sınıflamasına gidip dayandı. Bu anlayışa göre, birinci kalitedeki nesneleri kendilerinden daha basit nesnelerle açıklama olanağı yoktur. Geometrik veya mekanik olayların sanal görüntüsü olan bu nesneleri, biz, duyularımızla ya da sezgilerimizle algılarız. İkinci kalitedeki nesneler ise, birinci kalitedekiler yardımıyla açıklanabilir.[1] Örneğin, renk nesnesini (kavramını) birinci kalitedeki nesnelerle açıklayabiliriz. Bilimin, niceliklerin ötesini göremediğini kabul eden pozitivist ve mekanist anlayış, sonunda *"scientisme"* de karar kıldı.

Fiziği, olayları tasvir eden bir dil olarak kabul ettiğimiz zaman, fizik bize olayların bir tercümesini yapıyor demektir. Öyleyse, tercümeler arasında farklılıklar ve hattâ yanlışlıklar olması doğaldır. Dolayısıyla, problemin aslı, maddenin mahiyetini bilmeye, fiziksel dünyayı kavramaya ve fiziğin eşya hakkında bize verdiği bilgilerin sağlamlığından şüphe etmeye dayanmaktadır. Bunlar ise, doğrudan doğruya bilimin nesnel (objektif) değeriyle ilgilidir.

Bilime ve bilimin ortaya serdiği doğa yasalarına karşı başlatılan bu akım giderek bir uzlaşı noktasına erişti. O noktaya *conventionalisme (uzlaşımcılık)* deniyor. Bu kavramı biraz daha açmakta yarar olabilir. 18. ve 19. yüzyıllarda doğa bilimlerindeki hızlı gelişmeler materyalist akımı öne çıkardı. Fizik, kimya, biyoloji ve özellikle astronomide değerli bulgular elde edildi.

[1] Bu düşüncenin, Bertrand Russel'in paradokstan sakınmak için Kümeler Kuramında yaptığı sınıflandırmaya benzerliğine dikkat ediniz.

Bu gelişme, evrensel bir mekanizm ve determinizm yasası olduğu görüşüne kadar uzandı. Laplace[2], kendisine yeterli bilgilerin verilmesi halinde, 1000 yıl sonra evrenin herhangi bir yerinde ne olacağını hesap edebileceğini söyledi. Hareketi temsil eden diferensiyel denklemin analitik çözümünün bulunması ve sınır koşullarının verilmesi halinde, yalnız 1000 yıl sonrasının değil, 1000 yıl öncesinin de hesaplanabileceğini artık her matematikçi bilir.

Ama bu görüş çok tehlikeli görünmeye başlandı. Determinizm ilkesi yalnız fiziksel bilimlere değil, gerekli veriler olduğunda, sosyal bilimlere de uygulanabilir. Özel olarak her toplum ve her birey için de bu geçerli olmalıdır. Buradan, toplumların ve bireylerin davranışlarının ve akibetlerinin başlangıçta tayin edildiği gibi olacağı sonucuna varılır. Öyle olunca, toplumların geleneksel olarak *görev, liyakat, itaat* esasına dayanan ahlâki (etik) değerleri bir anda yok olur. Bununla da kalmaz, insanın aklî çabalarını bir yana itersek, determinizmi kaderci bir zihniyete indirgemiş oluruz. Çünkü, kaderci görüşe indirgenen determinizmde bireyin davranışları tamamen kalıtımının (irsiyet) etkisiyle belirlenecektir.

Bu kadar indirgenmiş bir determinizm anlayışına pek çok bilim adamının ve filozofun karşı çıkmasından daha doğal ne olabilir? *August Comte*, bir yandan insanın araştırmalarına sınır koymak isterken, öte yandan bilimsel yöntemlerle ahlakî ve siyasi problemleri çözeceğine inanıyordu.

J.Lachelier (1832-1918), *Kant*'ın "La Critique Du Judgement" adlı eserinden aldığı ilhamla doğa yasalarının nedensellik (casualité) ilkesi kadar sonuç (finalité) ilkesine de bağlı olduğunu savundu. Pozitivist determinizm denilen bu akımı ciddi olarak eleştiren bilim adamlarının öncüsü *Emile Boutroux* (1845-1921) sayılır. Boutroux, *"Doğa Yasalarının Olabilirliği"* adlı tezinde maddeden hayata, hayattan bilince, aşağı realiteden üstün realiteye geçtikçe determinizmin alanının daraldığını ve etkisinin azaldığını savundu. Sonuç olarak, "fizik âlemde egemen olan determinizm matematik kesinlik taşıyan bir determinizm değildir" yargısına vardı. Onun başlattığı doğa bilimlerini eleştiri akım, 1890-1915 yılları arasında zirveye ulaşmıştır. Bu akımın iki önemli niteliği vardır:

1. Bu akım doğrudan doğruya felsefeden çıkmamıştır ve teknik görünüme sahiptir. Öklityen olmayan geometrilerin varlığından yola çıkan akımın başında *Henri Poincaré (1854-1912), Georg Cantor, Bertrand Russel, Pierre Duhem, Gaston Milhaud (1858-1918), Edouard Le Roy* vardır. Ancak, bu adlar kendi aralarında da

[2] Pierre-Simon (Marquis de) Laplace (1749 –1827), Fransız matematikçi ve gökbilimci.

ciddi tartışma içindedirler. Örneğin, Poincaré, Le Roy'un görüşlerini çok sert bir dille eleştirmiştir.

2. Bilimlerin niteliğini eleştiren bu akım, bilimlerin değişmez ilkelerini ortaya koymak peşindedir. Dolayısıyla, metafizik ya da dinsel akımların yaptığı eleştirilerle bağdaştırılamazlar.

Antiscientisme diye adlandırılan bu akım, bilim karşıtı bir akım değildir. O, bilimlerin mahiyeti yanında *aklı* da eleştiriye tabi tutmuş; bilimi, dış dünyadaki varlıklarla aklın nesnel ilişkilerinin bir ifadesi olarak görmüştür. Böylece, sanat, din ve ahlak alanlarını positivisme'in ve scientisme'in kehanetlerinin işgalinden kurtarıp, insanın özgürlüğüne geniş bir kapı açmayı hedeflediği söylenmelidir. Geniş bir çerçevede *conventionalisme* adını alan bu akımın bazı temsilcilerinin görüşlerine yer vermek, konuyu daha iyi aydınlatacaktır.

Arthur Hannequine

Bölünemez olan şeyden sürekliyi (continue), hareketi ve reeli karakterize eden nitelikler çıkarılamaz. O nedenle Gay – Lussac gibi fizik yasaları yaklaşık ifadelerdir, kesinlik ifade etmezler.

Louis Weber

İdealizmi modern metafizik olarak niteledi. Deneyden gelen kesinlikten başka bir kesinlik kabul etmeyen bir bilimin, mutlak idealizmde çok sağlam bir güvence bulduğunu ileri sürerek, nesne yerine fikir (idée), veri yerine olguyu koymak ister.

Joseph Wilbois

Bir kuramın hem bir dil hem bir görüş açısı olduğunu savunmuş, her deneyin düşünülebilir hale gelmesi için idrakin yerini alan bir sembolün keyfi seçiminden ibaret olduğunu ileri sürmüştür.

Gaston Milhaud

Bilimlerde matematiksel kesinlik, açıklıkla hesabedilen zihinsel yaratmaların deney verilerinin yerine geçmesiyle oluşur. Bu zihinsel yaratmalarla reel arasında eşdeğerlik kurulamaz. Dolayısıyla, bilimler nesnel olarak kazandıklarını kesinlik uğruna yitirirler. Zira, bilimde, deney verisini aşan bir şey mevcuttur. Kesin belirginliği (determination) isteyen determinizm, reel ilişkilerde asla mevcut değildir. Öyleyse, bilim, Bacon ve Comt'un sandıkları gibi dış dünyaya ait ilişkilerin pasif bir kaydından ibaret değildir. Aksine, o, zihnin bir eseridir. Kendisine zorunsuzluğu ve evrenselliği veren yaratıcı bir özgürlük gereklidir. Bilim ussaldır (akli), reelin bir kopyası değildir; reelin ve zihnin ortak eseridir.

Pierre Duhem (1861-1916)

Döneminin tanınmış bir fizikçi ve matematikçisi olan Duhem bilimleri eleştiren akımın dikkate değer temsilcilerinden birisidir. Cevheri ve maddeyi anlamsız sayarak enerjiyi öne çıkarmıştır. Bilimsel kavramlar ile metafizik kavramları bağdaştırmaya uğraştı. Duhem'e göre fizik yasaları sembolik ilişkilerdir. Bir fizik yasası ne doğru ne de yanlıştır, yaklaşıktır, tahminidir, geçicidir. O nedenle fizik, matematiğin dilini kullanmasına rağmen onun gibi yanılmaz değildir, mutlak gerçekleri tanımaz. Fizik yasaları bu gün bizi tatmin etse bile, yarın gelecek kuşakları tatmin etmeyecektir. Gözlenebilen olaylardan ve deneylerden teorilere geçişte zihnin yaptığı işi bir tercüme olarak yorumluyor ve diyor ki "Olabildiğince salt matematik ve kavramcı olan bu tercüme için harcanan çaba başarılı olamasa bile, daima meşru ve zaruri olacaktır". Bilimin değerini inkâr eder görünen bu düşünceleri onu bilimsel şüphecilikten alıp bilimsel nominalizme götürmüştür. *Le Roy* ile benzer görüşleri paylaşan Duhem'in bilimsel nominalizmi şu iki hususa dayanır:

1. Olguyu yaratan bilim adamıdır. Her olgu kanunların içindedir. Dolayısıyla bilimin nesnelliğini gösterecek ham olguları tanımlamak olanaksızdır.
2. Olgu yaratma işi itibaridir (conventional). Ne doğru ne de yanlıştır. Ama o, bir aksiyon kuralına indirgenebilir.

Geometri

Euclides (Öklit, M.Ö. ≈300)

Kendi adıyla anılan geometrinin kurucusudur. Elementler adıyla yazdığı 11 ciltlik eser, insanlığa bırakılan en büyük miraslardan birisidir.

Nikolai Lobachevsky (1792-1856)

Öklit'in 5-inci postulatı, "bir doğruya dışındaki bir noktadan bir ve yalnızca bir paralel çizilir" der. Lobachevsky bu postulatı yadsıyan bir geometri kurdu. 1826 yılında duyurusunu yaptığı bu çalışması UMA da 1829-30 yılı sayısında yayınlandı. "*A concise outline of the foundations of geometry"* adıyla yazdığı makalesi St.Petersburg Bilim Akademisi tarafından red edildi. Makale *Kazan Messenger 'de yayınlandı.*

Lobachevsky'nin devrim yaratan bu buluşuna hiperbolik geometri diyoruz. Bu geometri, Öklit geometrisinin 5-inci postulatı dışındaki postulatları aynen kabul eder. 5-inci postulat yerine

> *"Bir doğruya dışındaki bir noktadan birden çok paralel çizilebilir."*

postulatını koyar. Sonuç olarak, bu geometride bir üçgenin iç açıları toplamı 180 dereceden küçük olur. Hiperbolik geometrinin kurucusunun kim olduğu hakkında spekülatif görüşler vardır. Gauss ve Bolyai adları geçer. Gauss'un bu konuyu düşündüğü biliniyor. Ama görüşlerini asla yayınlamadı. Bolyai ile Lobachevsky'nin eş zamanlı ama birbirlerinden habersiz konuyu çalıştıkları biliniyor. Ama ilk duyuruyu yapan kişi Lobachevsky olduğuna göre, bu geometriye onun adının verilmesi doğaldır.

Janos Bolyai (1802-1860)

Ünlü Macar matematikçi Farkas Bolyai'nin oğludur. Henüz 13 yaşındayken "calculus" ve "analitik mekanik" alanında ustalaşmıştı. Daha sonraları Öklit'in 5-inci postülatını uzun yıllar boyunca bir saplantı halinde düşünmeye başladı. O kadar ki, babası ona "yalvarırım bu takıntıdan vazgeç. Nefsinle ilgili bu tutkuyu at ve sağlığını koru." diyecektir. Ama o çalışmalarını sürdürür ve 5-inci postulatın öteki postülatlardan bağımsız olduğunu bulur ve Öklityen olmayan geometrilerin kurulabileceği sonucuna varır. Lobachevsky'den habersiz olarak hiperbolik geometriyi inşa eder. Babasına "tuhaf bir geometri" kurduğunu yazar. Janos Bolyai'nin buluşu 1832 yılında babası tarafından yazılan bir ders kitabına ek (appendix) olarak konulur. Gauss bu makaleyi okuyunca, "Bu genç matematikçiyi birinci sınıf geometrici olarak görüyorum" der. Lobachevsky'nin aynı işi yaptığını ancak 1848 yılında öğrenir. İkisi eş zamanlı olarak birbirlerinden habersiz olarak Öklityen olmayan geometriyi inşa etmiş olmalarına karşın, ilk yayını Lobachevsky yapmıştır.

İtalyan matematikçi *Beltrami (1835-1899)* Lobachevsky geometrisinin her terimini dikkatle Öklit geometrisinin bir terimine dönüştürdü. Böylece Lobachevsky geometrisinin Öklit geometrisine bir tür tercümesini yapmış oldu. Bu eylem, Lobachevsky geometrisinin Öklit geometrisine göre tutarlı olduğu anlamına geliyor.

Poincare'nin Farklı Geometriler Hakkındaki Görüşü:

Immanuel Kant (1724-1804), uzayın gerçek yapısının apriori olarak bilindiği görüşündeydi. Öklityen olmayan geometrilerin kuruluşu Kant'ın bu görüşünü çürüttü. Poincare, diferensiyel denklem çözümleri yapılırken, aslında Öklityen olmayan geometrilerin kullandığını söyler. Bazı geometrik problemleri Lobachevsky geometrisinde, Öklit geometrisinde olduğundan daha kolay çözdüğünü fark eder. Beltrami'nin yaptığı işi de dikkate alarak, Poincaré geometriler hakkında şu görüşe varır:

1. Öklityen olmayan geometriler de Öklityen geometrinin sahip olduğu mantıksal ve meşru matematiksel özeliklere sahiptir.
2. Bütün geometrik sistemler eşdeğerdir. Dolayısıyla hiçbir aksiyom sistemi doğru geometriyi kendisinin inşa ettiğini söyleyemez.
3. Geometrinin aksiyomları ne sentetiktir, ne analitiktir ne de aprioridir. Onlar kılık değiştirmiş tanımlardır veya uzlaşımlar (convention) dır.

Poincare'ye göre bütün geometriler uzayın aynı özeliklerini inceler, ama her birisi kendi dilini kullanır. Kullandıkları dili belirleyen şey onları belirleyen aksiyomlardır. Bu nedenle, bir geometri başka bir geometriye dönüştürülebilir (translate). Hangi geometriyi kullanmamız gerektiği hakkında basit bir kural işletiriz: Ekonomi ve basitlik. Bu nedenledir ki çoğunlukla Öklit geometrisini kullanırız; çünkü yakın çevremizde yaptığımız işler için o en basitidir. Ancak, Albert Einstein görelilik kuramı için Öklityen olmayan geometri kullanmıştır. Çünkü yapmak istediği iş için o geometride daha kolay kullanılıyordu. Tabii, Poincaré ile aynı görüşte olmayıp, Einstein'in uzayın Öklityen olmadığını keşfettiğini söyleyenler de vardır.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

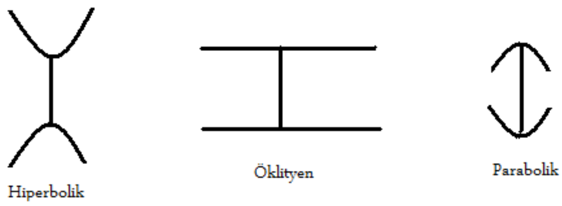
Öklitin 5-inci postulatını *Playfair*'in uyarlamasıyla ifade edelim.

İki boyutlu bir düzlemde bir d doğrusu ile doğru üzerinde olmayan bir A noktası verilsin.

Öklit Geometrisi: A noktasından geçen ve d doğrusuyla kesişmeyen bir ve yalnızca bir d' doğrusu vardır ($d \; // \; d'$).

Hiperbolik Geometri: A noktasından geçen ve d doğrusuyla kesişmeyen birden çok (sonsuz) doğru vardır. (Lobachevsky, Bolyai)

Eliptik Geometri: A noktasından geçen ve d doğrusuyla kesişmeyen hiçbir doğru yoktur.



1854 yılında *Riemann* bütün bu geometrileri içine alan çok daha genel bir geometri kurdu.

Kümeler Kuramı ve Sonsuzluk

Doğal diller, kuşkusuz bir şeylerin *'topluluk'*larını kavram olarak biliyor ve yerinde kullanıyordu. Matematikçiler de sonsuz küçük ve sonsuz büyük kavramlarını kullanarak analiz dediğimiz harika aracı yaratmışlardı. Analizi kullanan fizik, doğa olaylarını bir bir açıklamaya başlamıştı. Her şey yolunda gidiyordu. Ama, geçen yüzyıla girilirken Alman matematikçi *Georg Cantor (1845-1918)* *"küme"* kavramını ortaya attı. Ona dayalı yeni bir *"potansiyel sonsuz"* kavramı doğdu. Bu kavramlar matematikte bir devrim yarattı. Her devrim, kurulu düzende bir karmaşa yaratır. Matematikte de bu olgu kaçınılmaz olarak gerçekleşti; beklenmedik ve istenmedik bir zamanda büyük bir karmaşa doğdu.

Doğan karmaşayı açıklamak için şimdi hepimizin iyi bildiği $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$ doğal sayılar kümesinden başlayalım ve Cantor'un yaptıklarını anımsayalım: Cantor

$$1,2,3,\ldots$$

sayılarına ω ile gösterdiği (bir) sonsuz sayıyı ekledi:

$$1,2,3,\ldots,\omega$$

Burada durması için bir nedeni yoktu. Sayı eklemeyi sürdü:

$1 , 2 , 3 , \ldots , \omega , \omega+1 , \omega+2 , \omega+3 , \ldots$

Bu biçimde sayı ekleme işini 2□□□ya kadar götürdü:

$1 , 2 , 3 , \ldots , \omega , \ldots , 2\omega$

Sayı ekleme işine kendisini iyice kaptıran Cantor, eylemini inatla sürdürerek, sırayla, şu kümeleri elde etti:

$1 , 2 , 3 , \ldots , \omega , \ldots , 2\omega , 2\omega+1 , 2\omega+2 , 2\omega+3 , \ldots$

…

$1 , 2 , 3 , \ldots , \omega ,\ldots , 2\omega , \ldots , 3\omega , \ldots , 4\omega , \ldots$

…

$1 , 2 , 3 , \ldots , \omega , \ldots , \omega^2 , \ldots , \omega^3 , \ldots , \omega^4 , \ldots , \omega^5 , \ldots$

…

$1 , 2 , 3 , \ldots , \omega , \ldots , \omega^2 , \ldots , \omega^3 , \ldots , \omega^4 , \ldots , \omega^\omega$

…

$1 , 2 , 3 , \ldots , \omega , \ldots , \omega^2 , \ldots , \omega^3 , \ldots , \omega^4 , \ldots , \omega^\omega , \ldots , \omega^{\omega\omega} , \ldots , \omega^{\omega\omega\omega} , \ldots$

…

$1 , 2 , 3 , \ldots , \omega^{\omega\omega\omega\ldots}$

…

$1 , 2 , 3 , \ldots , (((\omega^\omega)^\omega)^{\omega\ldots}$

…

Sonunda ulaştığı (sonlu ötesi) sayılar, analizin bildiği sonsuz sayı kavramını ve bazılarının hayal sınırlarını çok çok aşıyordu. Matematikçiler önceleri buna pek aldırış etmediler. Ama giderek işin vehametini anladılar. Temel sarsılıyordu. Dünyanın en akıllı adamları arasında, yani matematikçiler arasında büyük bir tartışma başladı. Kimileri Cantor'un söylediklerinin gerçekle ilgisi olmadığı, kafa yormaya değmeyecek kurgular (fanteziler) olduğu görüşündeydi. Kimileri ise bu gibi şeylerin matematikçilerin değil, teolojistlerin düşüneceği saçmalıklar olduğunu savundu. En radikal kişiler ise, Cantor'un bir tımarhaneye kapatılarak ortaya çıkan sorunun yokedilmesi gerektiği görüşündeydi. Öyle de oldu. Cantor son yıllarını akıl hastanesinde geçirdi. Ama sorunlar çözülmedi. Cantor'un ortaya attığı kümeler kuramı, matematikte yepyeni bir çığır açtı. Çığır demek az, tam anlamıyla bir devrim yarattı! Bundan sonra matematiğin temelleri kümeler üzerine kurulmalıydı!..

Aritmetiğin Temelleri

Bir M matematik sisteminde iki nitelik ararız.

1. ***Tamlık (completeness)*:** İçindeki her teorem kanıtlanabiliyorsa sistem tamdır. Başka bir deyişle, sistemdeki her p önermesi için ya *'p doğrudur'* ya da *'p yanlıştır'* teoremlerinden biri kanıtlanabiliyorsa M sistemi tamdır.

2. **T*utarlılık (çelişkisizlik, consistency)*:** M sistemindeki her p önermesi için ya *"p doğrudur"* ya da *"p yanlıştır"* teoremlerinden ancak birisi geçerliyse M sistemi tutarlı, her ikisi aynı anda varsa M sistemi tutarsızdır.

Sezgisellik (intuitionism)

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966)

Matematiği sezgisel olarak kurmayı amaçlayan sezgisellik okulu esas olarak Brouwer 'in ortaya koyduğu sistemdir. Cantor'un kümeler kuramına dayalı yapıyı şiddetle yadsırken, Russell'in usbilimselliğine de karşı durur. Tartışma, *"akıl oyunları"*nın sergilendiği görkemli bir tiyatroya dönüşür. Sergilenen oyuna seyirciler de katılır… Poincare matematiğin temellerini varsayımlara (sezgisel uzlaşımlara) dayamak isterken, Kronecker teolojiye sığınıyordu. Ama bu akımın en önemli adı Poincaré 'dir.

Henri Poincaré

27 yaşında Fransız Bilimler Akademisine aday gösterilen büyük bir matematikçi, fizikçi ve astronomdur. Russel'a göre o, Fransa'nın yetiştirdiği en büyük insandır. *"Bilim ve Hipotez"*, adlı eserlerinde her bilimin hipotezle yaşadığını, *"Bilimin Değeri"* adlı eserinde ise

hipotezlerin bilimin değerinden hiçbir şey kaybettirmediğini savundu. Ona göre, matematiğin ilkeleri, yasalar ve fizik kuramları geniş bir "convention" (uzlaşma) payına sahiptir. Neden o convention'a değil de bu convention'a başvuruyoruz sorusuna "çünkü bu daha uygundur" yanıtını vererek "conventionalisme" doktrininin esas savunucusu ve hattâ kurucusu rolünü üstleniyor. Kuşkusuz convention'u yaratan şey sezgidir.

İlginç sayılacak bir görüşü, matematiğin yalnızca bir tümdengelim (deductive) bilim olmayıp tümevarım (inductive) bilim olduğunu ortaya koymasıdır. O, 19.yüzyılın son çeyreğinde hız kazanan bilimlerin eleştirisini matematiğe uygulamış en önemli kişidir. Fizikte tümevarımın pekinsiz olduğunu, çünkü o ilkenin evrenin genel bir düzene sahip olduğu inancına dayandığını söyler. Bu görüşten hareketle, matematikteki tümevarımı eleştiriye tabi tutar. İşin özüyle ilgili olduğu için Poincaré'nin verdiği örnekleri ele almak yararlı olacaktır.

Poincaré 'nin Çatışkılar Konusundaki Görüşü:

Poincaré 'nin, sonsuz bir küme üzerinde klâsik mantığın kurallarının geçerli olup olmadığı konusunu açıklamak için, kendisinin seçtiği örnekleri aktarmak istiyoruz. Antik çağlardan beri, sonsuz kavramının mantıkta çatışkı yarattığı iyi bilinir. Bunlar arasında, Zeno'nun kaplumbağasına erişemeyen hızlı koşucu Achilles, hedefe asla varamayan ok gibi örnekler, sonsuz seriler ortaya çıkınca kolayca çözüldü. Ama, bazıları asla çözülemedi. O dönemin iyi matematikçileri gibi, Poincaré de çatışkıyı yaratan nedeni aradı. Acaba çatışkıyı yaratan şey, mantık kurallarının iyi uygulanmayışından mı, yoksa mantık kurallarının sonsuz kümelere uygulanabilir olmayışından mı kaynaklanıyordu?

Konuya klâsik mantığın tasım (kıyas) yönteminin ne olduğunu açıklayan basit bir örnekle başlıyor. Formal mantık her sınıflamada ortak özeliklere sahip olanların incelenmesinden başka bir şey değildir diyor ve şu örneği veriyor: Aynı alaya mensup iki askerin, tasım yöntemiyle aynı tugaya ait olduklarını söyleriz. Gene aynı kuralla bu iki askerin aynı tümene ait olduklarını söyleriz. Bu akıl yürütmeyi yapabilmemiz için gerekli koşul nedir? Kabul edilen sınıflamanın kesin belirli ve değişmez oluşudur. Akıl yürütme sürecinde, iki askerden birisinin başka bir alaya nakledilmesi halinde vardığımız yargı yanlış olacaktır.

Poincaré 'ye göre, ortaya konan örneklerin hepsinde çatışkıyı yaratan neden bu basit kurala uyulmamasıdır. Bu iddiasını, Russel'in kümeler kuramında oluşan çatışkılara (paradox) gösterdiği aşağıdaki örnek üzerinde açıklıyor.

Türkçe dilinde 100 kelimeden daha az kelimeyle ifade edilemeyen doğal sayıların en küçüğü var mıdır? (Elbette soruda Türkçe yerine başka bir dil 100 yerine başka bir sayı konulabilir.)

İstenen sayı hem var hem yoktur:

Bu tür çatışkılarda izlenen genel yöntemi izleyelim. Bütün doğal sayılar kümesini 100 kelimeden daha az bir cümle ile ifade *edilemeyenler* ve *edilenler* diye ikiye ayıralım. Edilemeyenler kümesine A', edilebilenlere A diyelim.

Türkçede kelimelerin sayısı sonlu olduğu için, en çok 100 kelimeyle kurulabilecek cümlelerden oluşan küme sonludur. Bu küme içinde anlamsız olanlar, veya bir doğal sayıyı ifade etmeyenler de var olacaktır. Bütün o cümleleri atarsak, geriye kalan A kümesinde en çok yüz kelimelik bir cümle ile ifade edilebilen doğal sayılar kalacaktır. Bunların sayısının sonlu olacağı apaçıktır. A *ve* A' kümelerindeki her bir x sayısını belirleyen bir $p(x)$ cümlesi vardır. Tabii, $a \in A$ için $p(x)$ cümlesi x sayısını en çok 100 kelimeyle ifade eden bir cümledir. Benzer olarak, $a \in A'$ için $p'(x)$ ise x sayısını en çok 100 kelimeyle ifade edemeyen bir cümledir. Bu durumda $\wp$ doğal sayılar kümesi olmak üzere

$$A = \{x \mid p(x)\} \ , \ A' = \{x \mid p'(x)\} \ , \ \wp = A \cup A' \ , \ A \cap A' = \phi$$

yazabiliriz. $\wp$ doğal sayılar kümesi sonsuz ve iyi sıralı bir kümedir. Sonlu A kümesinin doğal sayılardaki tümleyeni olduğu için A' kümesi sonsuz bir kümedir. O halde boş değildir. İyi sıralanmış bir kümenin her alt kümesi de iyi sıralı olduğundan A' kümesi iyi sıralıdır, dolayısıyla en küçük öğesi vardır. Buna a diyelim. $a \in A'$ olduğu için, a sayısı 100 kelimeden az bir cümleyle ifade edilemeyen bir sayıdır. Demek ki $p(a)$ ifadesi (önermesi) a sayısını 100 den az kelimeyle ifade edemeyen bir cümledir. Öte yandan, a sayısı 100 kelimeden az kelimeyle ifade edilemeyen sayılardan oluşan A' kümesinin en küçüğüdür. O halde a sayısı istenen sayıdır. Bu sayıyı aşağıdaki yeni cümle ile ifade edebiliriz:

> "a sayısı 100 kelimeden az bir cümle ile ifade edilemeyen sayılardan oluşan A' kümesinin en küçüğüdür."

Bu cümle 100 kelimeden azdır. O halde $a \in A$ olacaktır. Oysa $a \in A'$ idi. Bu bir çatışkıdır (paradox).

Poincaré bu çatışkıyı yaratan nedeni şöyle açıklıyor. Doğal sayıları, 100 kelimeden az bir cümle ile ifade edilemeyenler ve edilebilenler diye iki kategoriye ayırdık. Bu ayırmanın kesin ve değişmez olduğunu varsayarak işe başlıyoruz. Oysa bu mümkün değildir. Başlangıçta, 100 den az kelimeyle kurulabilen bütün cümleleri listeleyip, onların içinden anlamsız olanları ve bir doğal sayı ifade etmeyenleri attıktan sonra geri kalan A kümesinin kesin belirli ve değişmez olduğunu varsaydık. Bu işi yaparken A' kümesini ve dolayısıyla onun en küçük öğesini hesaba katmadık. Doğal sayıları iki kategoriye ayırdıktan sonra, tasım sırasında A' kategorisinden A kategorisine geçiş olmaktadır. Daha açıkçası, tasımın her adımında A' nün en küçük öğesi A kümesine geçmektedir. Bu geçiş eylemi, ard arda sonsuz kez tekrarlanabilir. Dolayısıyla hiçbir adımda A kümesini kesin ve değişmez kılamayız.

Poicaré, sonsuz koleksiyonlar ele alındığında benzer problemle daha çok karşılaşılacağını vurgulayarak, sınıflandırmaları *predicative* ve *nonpredicative* diye ikiye ayırıyor. Predicative olan ve olmayan sınıflamalara örnek olsun diye aşağıdaki iki örneği seçiyor.

Örnek 1 (predicative sınıflandırma):

Doğal sayıları 10 dan küçük olanlar ve olmayanlar diye iki sınıfa ayıralım. 10 dan küçük olanlara A, olmayanlara A' diyelim. Rasgele seçeceğimiz doğal sayıları ait oldukları kümelere gönderelim. Rasgele 100 doğal sayı seçelim. Bu sayıların her birisinin A kümesine mi, yoksa A' kümesine mi ait olduğu kolayca belirlenir ve ilgili kümeye gönderilebilirler. Daha sonra 101 inci, 102 inci, … gibi yeni sayılar geldikçe hangi kümeye ait oldukları belirlenip ilgili yere gönderilebilir. Bu şekilde, rasgele seçilip gönderilen sayıların katılmasıyla A ve A' kümeleri değişmez. Dolayısıyla bu sınıflandırma *predicative*'dir.

Örnek 2 (nonpredicative sınıflandırma):

Gene doğal sayıları düşünelim. Bir doğal sayı bir çok cümle ile ifade edilebilir. Aynı sayıyı ifade eden cümleleri bir çekmeceye koyalım. Aynı çekmecede olan cümleleri sözlük sıralamasına koyalım. İlgili doğal sayıyı temsil etmek üzere, çekmecedeki sıralamaya göre ilk cümleyi seçelim. Bu ilk cümle bir sesli harfle bitiyorsa, temsil ettiği sayıyı A kümesine, bir sessiz harfle bitiyorsa A' kümesine koyalım. Böylece doğal sayıları iki sınıfa ayırmış oluruz.

Bu sınıflandırma yapıldıktan sonra, daha önce ortada olmayan yeni cümlelerle doğal sayı ifadeleri kurulabilir. Örneğin,

27 inci çekmecedeki sayıların en küçüğü,

99 uncu çekmecedeki ikinci en küçük sayı,

17 inci çekmecedeki sıralamada 5 inci olan sayı,

Rasgele seçilecek 10 çekmecenin belirlediği sayıların en büyüğü

gibi cümlelerin her birisi bir doğal sayıyı ifade eder. Bu cümleler belirlenen kurala göre ilgili çekmecelere gidecektir. Gittikleri çekmecede sözlük sıralamasını değiştireceklerdir. Her hangi bir çekmecelerdeki yeni sözlük sıralamasında ilk cümlenin değişmesi olasılığı vardır. İlk cümle değişince, sessiz harfle bitenin sesli harfle bitiyor olması veya tam aksinin olması mümkündür. Hattâ böyle olacak şekilde cümle kurulabilir. O zaman A kümesine sayı gönderen çekmece A' kümesine gönderiyor veya bunun tam aksi oluyor olacaktır. Bu demektir ki, A ve A' kümeleri hiçbir zaman belirli (sabit) kılınamaz. Doğal sayı belirleyen yeni cümleler geldikçe, A ve A' kümeleri değişecektir. Bu sınıflandırma *nonpredicative* bir sınıflandırmadır.

Poincaré 'nin Peano Aksiyomları Hakkındaki Görüşü:

Gotlab Frege ve Bertrand Russel matematiğin bütün deyimlerinin mantık deyimleriyle ifade edilebileceğini, dolayısıyla matematiğin, mantığın bir alt dalı olduğunu ileri sürmüşlerdi. Poincaré bu görüşe karşı duruyor ve Brouver gibi matematiğin temellerini sezgiye dayandırmak istiyordu. Ona göre, bir matematiksel varlığın tanımı, o varlığın asli özeliklerini ortaya koymaz, yalnızca o varlığı inşa eder. Başka bir deyişle, meşru bir matematiksel tanım kendi nesnesini yaratır ve varlığını sağlar. Aritmetik analitik değil, bireşimsel (sentetik) bir bilimdir; onun nesneleri insan düşüncesinden bağımsız olamaz.

Bilindiği gibi, sayı kümelerinin kuruluşu doğak sayılara ve o kümeler üzerindeki aritmetik doğal sayılar üzerindeki aritmetiğe dayalıdır. Dolayısıyla, aritmetiğin temellerini araştıran her eylem doğal sayıların varlığına dayanır. Doğal sayıların varlığı Giuseppe Peano (1858-1932) tarafından ortaya konuldu. Peano Aksiyomları diye adlandırılan beş aksiyom şunlardır:

1. 0 bir doğal sayıdır.
2. 0 başka bir doğal sayının ardışığı değildir.

3. Her doğal sayının bir doğal sayı ardışığı vardır.
4. Ardışıkları eşit olan iki doğal sayı birbirine eşittir.
5. Tümevarımın Tamlık İlkesi (Complete Induction Principle)

Hipotez:

a. 0 doğal sayısı bir *p* özeliğine sahipse,
b. A dan küçük doğal sayılar *p* özeliğine sahipse,

Hüküm: Her doğal sayı p özeliğine sahiptir.

Russel'a göre Peano aksiyomları doğal sayıların varlığını ortaya koyan tutarlı ve kesin (örtük, implicit) bir tanımdır. *Poincaré* bu görüşe karşı durdu. Ona göre, bu aksiyomları sağlayan bir nesnenin varlığı ispat edilmeden Peano aksiyomlarının tutarlı olduğu söylenemez. Daha genel olarak, bir aksiyom sisteminin kesin (implicit) tanım sayılabilmesi için söz konusu aksiyomların hepsini sağlayan bir nesnenin varlığının gösterilmesi gerekir. Peano aksiyomları için bunu yapmak çok zordur. Çünkü, beşinci aksiyom sonsuz kez yineleniyor. Bir nesnenin Peano aksiyomlarını sağladığını test ederek son adıma ulaşmak mümkün değildir. Bu durumda bir tek yol kalıyor.

> "Bir usavurmada (inference) öncüller (premise) mantığın aksiyomları ile tutarlı iseler, varılan yargı (hüküm, consequence) da öyle olacaktır."

kuralını kullanmak. Peki bu mantık kuralını sonsuz kez ard arda çalıştırabilir miyiz? Başka bir deyişle, "n usavuruştan sonra bir çelişki doğmuyorsa n+1 inci usavuruşta da doğmayacaktır" diyebilir miyiz? Bunu dediğimizde tümevarımı (induction) mantık için kabul etmiş oluyoruz. Bu bir kısır döngüdür (facit daire). Peano aksiyomlarının tutarlılığını ispat etmek için Peano aksiyomlarını kullanıyor olacağız.[3]

Poincaré buradan şu sonuca varıyor. Peano aksiyomlarının tutarlılığını facit daireye düşmeden, mantık kurallarıyla gösteremediğimiz sürece, tümevarım ilkesini mantık kurallarıyla ispat etmiş olmayız. Bu demektir ki, tümevarım ilkesi analitik değil, sentetiktir. Aritmetik mantığa indirgenemez. Çünkü mantık analitiktir, aritmetik sentetiktir.

---

[3] Peano aksiyomlarının tutarlılığı ancak 1936 yılında Gerhard Gentzen tarafından ispatlanabildi. Ne var ki, Gentzen'in ispatı sonlu ötesi tümevarımı kullanıyor. Aynı düşünüşle sonlu ötesi tümevarımın tutarlılığı da ispata muhtaçtır.

Aritmetiğin sentetik karakterini başka örneklerle de görebiliriz. Matematikte *sağlama* ve *ispat* farklı iki olgudur. Sağlama eylemi bir mekanik bir işlemdir. Ama ispat eylemi doğurgandır. Örneğin, 2 + 2 = 4 işleminin doğruluğu, toplamın tanımı kullanılarak mantık kurallarıyla sağlanabilir. Doğrudan sağlaması yapılabilen analitik bir ifadedir. Buna karşın,

Her x ve her y için $$x + y = y + x \qquad (*)$$

ifadesi doğrudan sağlanamaz. Elbette rasgele a ve b sayıları verildiğinde $a + b = b + a$ eşitliğini sağlayabiliriz. Ama sonsuz sayıda a,b öğeleri vardır. Her sayı çifti için sağlama yaparak sağlamayı bitiremeyiz. O halde, *(*)* eşitliğini seilecek bir öğe çifti için sağlamak analitik bir iştir ve mantık kurallarıyla yapılabilir. Ama söz konusu eşitliğin her öğe çifti için varlığını mantık kurallarıyla göstermek mümkün değildir; ifade sentetiktir.

Poincaré 'nin işaret ettiği başka önemli bir konu sezgi ile mantığın matematikteki farklı rolleridir. Formal mantığın metotları basit ve kesindir. Onlara güveniriz. Ama mantık, bir ispatın nasıl olacağını bize söyleyemez. Bu noktada sezgi devreye girer. Sezgimiz bize ispatı nasıl kurgulayacağımızı söyler. Bunu açıklamak için şu örneği veriyor. Usta iki santraççıyı izleyen acemi bir satranççı, oyuncuların yaptıkları hamlelerin satranç kurallarına uyup uymadığını sağlayabilir (anlayabilir). Ama oyuncuların hangi taşı neden öyle oynadıklarını bilemez. Çünkü oyuncunun izlediği oyun planını bilemez. Benzer şekilde, bir matematikçi bir ispatta geçen her usavurmayı (çıkarım) mantık kurallarıyla sağlayabilir. Ama orijinal ispatı bulamaz. Başka türlü söylersek, bir ispattaki her usavurmanın doğruluğu mantık kurallarıyla sağlanabilir. Ancak ispatın kurgulanması sezgiyle olur.

Matematiğin temellerinin kuruluşunda sezgi önemli ve inkâr edilemez rol oynar. Matematiksel bir tanım, tanımlanan öğenin özüne ait bilgileri vermez; yalnızca o öğenin kuruluşunu yapar. Başka bir deyişle, matematiksel bir tanım tanımladığı şeyi yaratır ve onun varlığını sağlar. Aritmetik bireşimsel (synthetic) bir bilimdir, onun nesneleri insan düşüncesinden bağımsız değildir.

Usbilimsellik (Logisizm – Russel Okulu)

Henüz ilkokula başlamadan öğrendiğimiz aritmetiğin temellerini kurmak için matematikçiler olağanüstü çaba harcadılar. Bunlar arasında en önemlileri sıralayacağız.

Gotlab Frege (1848-1925)

Alman matematikçi, mantıkçı ve filozof. Bu alanda çalışanların en gayretlisi ve öncüsüdür. *Gotlab Frege* iyi bir mantıkçıdır. Matematiğin yasalarının mantığın yasalarından çıkarılabileceğini savunmuştur. Bilindiği gibi Russel da aynı görüştedir. 1879 yılında yayınladığı *Begriffsschrift* adlı eserinde kurguladığı ikinci basamaktan predicate calculus ile matematiksel tanımlar yaptı ve teoremler ispatladı.

1893-1903 yılları arasında hazırladığı *Grundgesetze der Arithmetik* adlı eserinde aritmetiğin temellerini mantığa dayandırmak istedi. Mevcut aksiyomlara *V.Temel Yasa* adıyla bir aksiyom daha ekledi. *Dedekind / Peano* belitlerini ikinci basamak logic kurallarıyla ispatladı. Buna dayanarak aritmetiğin temel teoremlerini elde etti. O zamanlar matematik kitaplarını yayınlamak zor ve pahalı bir işti. *Frege*, kendi parasıyla birinci cildi yayınladı. İkinci cilt baskıda iken *Bertrand Russel*’dan kısa bir mektup aldı. Russel *V.Temel Yasa*’nın çatışkı yarattığını, dolayısıyla o yasanın ve o yasaya dayalı olarak çıkarılan bütün sonuçların logic açısından yok hükmünde olduğunu söylüyordu. Freg, hayatının en verimli 10 yılını harcadığı teorisinin çöktüğünü anlamıştı. Büyük bir olgunlukla, Russel’in mektubunu ikinci cildin sonuna ek olarak koydu. Bu gün, *V.Temel Yasa* olmaksızın Frege’in ispatlarının geçerli olduğunu söyleyen mantıkçılar vardır.

Bertrand Russel (1872-1970)

Matematiğe sonsuz kavramının girişiyle birlikte çatışkılar (paradox) ortaya çıkmaya başladı. Bütün kümelerin kümesi kavramının çatışkı yarattığı 1903 yılında Russel tarafından ortaya kondu. Sonra bu kavramı daha popüler biçimlerde ifade eden uyarlamalar yaygınlaştı. Onlar arasında çok bilinen birisi berber çatışkısıdır. *“Bir kasabanın berberi, o kasabada kendini traş etmeyen herkesi traş edermiş, kendini traş edenleriyse traş etmezmiş. Acaba bu berber kendini traş eder mi? Kendini traş etmezse, kendini traş etmeyen herkesi traş ettiğinden, kendini traş etmeli. Kendini traş ederse, kendini traş edenleri traş etmediğinden, kendini traş etmemeli.“* Sokaktaki birisi, “berberin kendini traş edip etmemesinden bana ne!” diyebilir. Ama bu çatışkıların birer oyun, birer bilmece olmayıp, matematiğin temellerini derinden sarsan üstün düşünceler olduğunu matematikçiler endişeyle kavramışlardı.

Principia Mathematica: Russel ve Whitehead matematiğin temellerinde oluşan sarsıntıyı görmek ve söylemekle yetinmediler. Matematikte doğan çelişkiyi yokedecek yöntem aradılar. Sırasıyla 1910, 1912 ve 1913 yıllarında yayımlanan üç ciltlik *Principia Mathematica* 'da bütün matematiğin usbilimselliğe (logicism) indirgenebileceğini savundular. Tezlerini iki bölüme ayırabiliriz. Birincisi, bütün matematiksel doğrular usbilimsel doğrulara (logical truths) dönüştürülebilir. Başka bir deyişle, matematiksel deyimler usbilimsel deyimlerin bir alt kümesidir. İkincisi, bütün matematiksel kanıt (proof) yöntemleri usbilimsel kanıt yöntemleriyle ifade edilebilir. Başka bir deyişle, matematiksel teoremler usbilimsel teoremlerin bir alt kümesidir. Russell'in sözleriyle özetlersek, bütün (pure) matematiğin usbilimsel kurallarla elde edilebileceğini göstermek usbilimcinin işidir. Öyleyse, matematik usbilimdir, matematikçi de usbilimcidir. *Principia Mathematica* modern matematiksel usbilimin doğmasına neden olmuştur. İlk yayımı parasızlık yüzünden geciken *Principia Mathematica,* Aristotle'in *Organon* adlı ünlü yapıtından sonra, usbilim alanında yazılmış en önemli yapıt olarak kabul edilir.

Biçimsellik (formalism – Hilbert Okulu)

David Hilbert (1862-1943), *"akıl oyunları"*nın son perdesini indirmek istedi. Adına *Kanıt Kuramı (Proof Theory)* dediği biçimsel bir matematik dili geliştirdi (1927). Ona göre sezgisel matematik yaparken konuştuğumuz dil, duygularımız, özne (madde) geleneksel çıkarım yöntemlerimize dışarıdan etki etmektedir. Dış etkileri yoketmek için bir matematik dili, yapay bir dil oluşturdu. Yedi ana grupta topladığı 17 formül ile matematik teoremlerini kanıtlayabiliyordu. Ortaya attığı kuramın ilk sunumunu yaparken şöyle diyordu:

> *"Matematik önyargısızdır. Onu bulmak için Kronecker'in yaptığı gibi Tanrıya, Poincare'nin yaptığı gibi yeteneklerimize hitabeden varsayımlara, Brouwer'in yaptığı gibi temel sezgilere, Russell'in yaptığı gibi belitlere gereksinim yoktur. Matematik formüllerden oluşan kendi içinde kapalı bir sistemdir."*

Hilbert büyük bir matematikçidir. 20. yüzyıl matematiğine damgasını vurmuştur. 1900 yında Paris'te yapılan Uluslararası Matematik Kongresinde ortaya attığı problemler, aradan geçen 100 yılda tam çözülememiştir, ama bu problemler yüzyılın matematiğine yön vermiştir.

Herkes böyle bir dahinin *"akıl oyunları"* için yazdığı son perdeyle temsilin bittiğine inanmaktadır. Ta ki Gödel denen biri çıkıp oyuna hiç bitmeyecek bir perde daha ekleyene kadar…

Kurt Gödel (1906-1978)

Geometrilerin, doğal sayıların ve kümeler kuramının aksiyomlarla kuruluşu şu soruyu gündeme taşıdı:

Bir formal sistemin aksiyomları, o sistemin her modeli içindeki bütün doğruları çıkarsamaya (deduce) yeterli midir?

Kurt Gödel komuyla ilgili olarak iki önemli sonucu ortaya koydu.

1. *Tamlık Teoremi (1929):* Matematiksel mantıkta semantik bir doğru birinci basamak lojik içinde ispatlanabilir.

2. Eksiklik Teoremi (1931):
   a. Sistem tutarlı ise tam değildir.
   b. Sistemin aksiyomlarının tutarlı olup olmadığı, o sistem içinde ispatlanamaz.

Eksiklik teoremi diye bilinen teorem (a) ile ifade edilendir. Bu bize şunu söylüyor:

> Doğal sayılar aritmetiğini içerecek kadar karmaşık herhangi bir sistemin içinde, sistemin aksiyomlarıyla doğruluğu veya yanlışlığı kanıtlanamayacak önermeler vardır.

1931 yılında Kurt Gödel bu sonucu ortaya koyana kadar, Hilbert'in formal sisteminin matematikteki krizi tamamen çözdüğü sanılıyordu. *Eksiklik (incompleteness, undecidability)* adını alan bu teorem, bir sistemin tutarlı olup olmadığının o sistem içinde kanıtlanamayacağını söylüyor. Eksiklik Teoremi 20. yüzyıl matematiğinin yönünü değiştirmiştir. Çünkü bu sonuç, kendi içinde kapalı bir sistem oluşturduğu sanılan *Hilbert* formalizminin çöküşü anlamına geliyordu. O zamana kadar kimse Hilbert'in yanılmış olabileceğini düşünmüyordu. Dahi matematikçi *von Neumann* bile Gödel'in yaptığını öğrenince *"Yanıldım, gemiyi kaçırdım!"* diye hayıflanmıştır. *Principia Mathematica*, Organon'dan sonra usbilimde yazılan en büyük yapıt sayılıyor, demiştik. Benzer olarak, *Kurt Gödel, Aristoteles*'ten sonra gelmiş en büyük usbilimci ününü kazanmıştır.

Alan Mathison Turing (1912-1954)

Hilbert şu önemli soruyu ortaya atmıştı:

> *Entscheidungsproblem (Decision Problem):* Her hangi bir matematik önermesinin ispatlanabilir olup olmadığına karar vermeye yarayan bir yöntem var mıdır?

1936 yılında Alan Turing, universal machine (Turing Machine) adını verdiği mekanik problem çözme makinasıyla soruya şu yanıtı verdi:

> Her matematik problemini çözen genel bir Turing Makinası (algoritma) yoktur.

Buna ek olarak şunu da kanıtladı.

> Hesaplanabilir her şeyi hesaplayan bir evrensel Turing makinası (algoritma) vardır.

Turing, bu günkü bilgisayarların çalışma ilkelerine çok benzeyen bir yöntemle, bütün problemleri çözen mekanik bir makinanın (ya da algoritmanın) var olamayacağını kanıtladı. Bu sonuç, farklı bir yaklaşımla Gödel'i doğrulamaktadır. Hatta, Greg Chattin'e göre, Gödel'in yaptığı işten daha büyüktür.

Greg Chattin

> Yeterince karmaşık bir aksiyomatik sistemde ispatlanabilir önermeler sayılabilir sayıdadır.

Sonuç: *"Akıl Oyunları"* sürüyor; henüz son perdesini kimse yazamadı. İnsan aklı o son perdenin yazılmasına belki hiç izin vermeyecektir. Kimbilir, belki *erdemi* de bu oyuna katabilir.

Ahlâk ve Bilim

XIX. yüzyılın son yarısında *bilimsel ahlâk* yaratma hayalini kuranlar oldu. Onlar sanki matematikte, fizikte ve öteki bilim dallarında olduğu gibi, ahlâkın bilimsel kuramını ortaya koyacaklar ve dolayısıyla herkesin itirazsız kabul edeceği ahlâki kuralları hayata geçirmiş olacaklardı. Poincaré, o dönemdeki zıt iki görüşü şöyle özetliyor.

1. İnanan insanlar üzerinde dinlerin büyük egemenliği vardır. Dolayısıyla, inanan insanların kendi dinlerinin koyduğu ahlâki kurallara itaat etmesini kolayca sağlayabilirsiniz. Ne var ki inan, ancak bazı insanlara kendini kabul ettirir. Üstelik farklı dinler farklı ahlâk kuralları koyar. Bazı insanlar inan yerine akıl kullanmayı isterler. Akıl herkese kendisini kabul ettirir. Öyleyse, evrensel ahlâk kuralları koymak istiyorsak, başvurmamız gereken yer inan değil, akıldır. Böylece, herkesin kabul edeceği bilimsel ahlâkı tesis edebiliriz.

2. Bazı insanlar bilim hakkında iyi şeyler düşünmezler. Onlara göre bilimde bir ahlâksızlık okulu vardır. Maddeye fazla yer verdiğinden değil, insanlardan saygı duygusunu aldığı için bilimi tehlikeli bulurlar. Onlara göre, insanlar erişilemeyen şeylere saygı gösterir. Bilim, tanrıların sırlarını açığa vurdukça, tanrılar prestijlerinden bir şeyleri yitirmektedirler. O nedenle, bilginleri başıboş bırakmak doğru değildir; onlar başıboş bırakıldığı zaman ortada ahlâktan eser kalmayacaktır.

Biri bilimsel ahlâkın tesisi için bilime umut bağlayan, ötekisi bilimin ahlâkı yok ettiği şüphesini taşıyan bu iki görüşün ikisi de boşunadır. Çünkü *bilimsel ahlâk olmaz, ahlâksız bilim de olmaz*. Bu tümcenin ne anlama geldiğini aşağıda mantık bilimi içinde açıklayacağız.

Bilimsel Ahlak Yoktur

Bir tasımın (çıkarım, usavurma) öncüllerinden her ikisi de bildirimci (indicative) olursa çıkan sonuç da bildirimci olacaktır. Oysa ahlâk kuralları bildirimci değil, buyrukçudur (imperative). Bir tasımda sonucun buyrukçu olabilmesi için, öncüllerden en az birisinin buyrukçu olması gerekir. Öte yandan, bilimin belitleri ve önermeleri buyrukçu değil, bildirimcidir. En hünerli diyalektikçi bu ilkelerle ne kadar oynarsa oynasın, onları buyrukçu yapamaz. Dolayısıyla, bilimsel çıkarımlardan buyrukçu sonuçlar elde edilemez. Hiçbir zaman *"bunu yap, şunu yapma"* gibi kurallar bilimde ortaya çıkmaz. Başka bir deyişle, bilimden ahlâkı doğrulayan ya da onaylayan önermeler elde edilemez. İşte bilimsel ahlâkı kurmayı isteyenlerin karşılaştığı aşılamayacak güçlük budur. Onlar evrensel ahlâk yasalarını ortaya koymaya ve onları kanıtlamaya uğraşıyorlar. Sanki ahlâk bir şeyin üzerine kurulabilirmiş gibi, ahlâkı bilimin üzerine kurma zorunluluğunu duyuyorlar. Bilim bunu asla yapmaz. O halde bilimsel ahlâk yoktur.

Bilim kendi başına bir ahlak yaratamadığı gibi, tek başına gelenekten gelen ahlakı doğrudan doğruya sarsamaz, yıkamaz. Ancak, dolaylı olarak etkisi olmaz mı? sorusuna yanıt arayabiliriz. İnsanın çevresinde oluşan ve bizzat kendisinin yaptığı eylemlerin her türlüsü onda bir etki yapar; bireyde ve toplumlarda yeni ruh halleri yaratır. İnsan acıma duygusu, sevinç, öfke, coşku gibi yeni duygulara kapılır. Acaba buna benzer şeyler bilim sevgisi için olamaz mı? Bilim bize daima yenilenen, genişleyen bir ufuk açar. Açılan yeni ufuklarda yeni şeyler keşfettirir. Yüceltmemiz gereken şey, bilginde uyanan bu bilim tutkusudur, bilim sevgisidir. Ama bu sevgi ve tutku bilimsel ahlak değildir.

Dogmatik Ahlaklar Evrensel Olamaz

"İtaat ediniz, çünkü tanrı böyle buyuruyor!" demek bir kanıt değildir. Kuvvete boyun eğmek ahlaklı olmak değildir, hattâ itaat etmek bile değildir. İş inanca geldiğinde, kimileri yaşamak için her şeyi yapma hakkına sahip olduklarına inanabilir. Bir tanrıya itaat etmek gerektiği ispat olunamaz. Olsa olsa, onun güçlü olduğu ve bizi ezebildiği veya onun iyi olduğu ve ona minnet borçlu olduğumuz aracılar vasıtasıyla bize gösterilebilir. Ama tanrıyı seviyorsak her kanıt gereksiz olacak ve itaat etmeyi doğal davranış saymaya başlayacağız. Bu nedenle, dinler matafizikten daha kuvvetlidir. Ama koydukları ahlak kuralları evrensel olamaz.

Toplumun yararı üzerine, vatanseverlik üzerine, özgecilik üzerine de bir ahlâk kuramayız. Çünkü, gerektiğinde mensup olduğumuz topluma ya da başkasının menfaatine kendimizi feda etmemiz gerektiğini mantık kurallarıyla kanıtlamak gerekir. Zavallılar hakkında merhametli olmamız gerektiği kanıtlanamaz. Böyle bir kanıtı hiç bir bilim, hiçbir mantık kuralı veremez. Vatan sevgimizin haklı ve yerinde olduğunu usavurmalarla göstermemiz istendiğinde zorda kalırız, yapamayız. Ancak, ordularımızın yenilmiş, ülkemizin düşman ordusu tarafından işgal edilmiş olduğunu öğrenirsek ruhlarımız isyan edecek ve vatanımızı kurtarmanın çarelerini düşünmeye başlayacağız. Layık olmadığımız davranışlarla ya da sefaletle karşı karşıya bırakıldığımızda, bir isyan duygusuyla ayaklanırız.

Görülüyor ki *doğmatik ahlâk* ve *bilimsel ahlâ*k önceden başarısızlığa mahkümdur. Ancak, toplumlar için geleneklerden, inançlardan ve deneyimlerden elde edilen ahlak kurallarının önemi yadsınamaz. Her şeye rağmen, bencil olmanın en uygun olduğu kesin değildir. Zira hiç bencil olmayan insanlar da vardır. Menfaat ahlâkı ve bencilik ahlâkı bir yerde güçsüz kalacaktır.

Ahlaksız bilim olmaz

Doğa yasalarının parlak rengini gören bilim adamı kendi küçük bencil menfaatlerini unutacak, kendinden daha çok seveceği bir ülküye kavuşacaktır. Bu ülkü için, o, zahmet ve emeğinin karşılığı olacak hiçbir mükâfat beklemeden çalışmaya devam edecektir. Böylece, bencil insanların karşılıksız asla yapmadığı işleri yüksünmeden şehvetle yapacaktır. Bu olgu, bilim adamında yepyeni duygular yaratır. Bu bilim sevincidir, gerçeği arama tutkusudur. Bu sevincin ve tutkunun ahlakça sağlam olduğunu söyleyebiliriz. Bu ahlak, bütün hayatı boyunca bilim adamının yanında olacaktır.

Ahlaksız insanda en çok raslanılan ve insanı en alçaltan şey *yalan* değil mi? Bütün ahlakçılar yalanla savaştıklarını söylemiyorlar mı? Peki gerçeğin peşinde koşan bilim adamında veya bilim yöntemlerinde yalanı yücelten bir olgu var mı? Bilim adamı bulduğu gerçeği, bütün olumsuz koşullar altında ve hatta cezalandırılma tehdidi altında olsa bile açığa vurmuyor mu? Bu nitelik ahlakçıların herkeste olmasını istediği bir nitelik değil midir?

Geniş anlamda alınan ve onu anlayan ve seven üstatlar tarafından öğretilen bilim, ahlak terbiyesinde çok yararlı ve çok önemli rol oynayabilir. Fakat ona has bir rol vermek hata olur. Bilim ahlaki saik vazifesini görebilen, iyilik yaptırıcı duygular doğurabilir. Fakat başka disiplinler de bunu yapabilir.

Değişmezlik (uniformite) ölümdür. Çünkü o her ilerleyişe kapalı bir kapıdır. Bilim değişimi, ilerlemeyi sağlıyor.

Ahlaksız bilim olmaz derken, kastettiğimiz şey bunlardır.

Bilimde Denetim

Canlı için hava ne ise bilim için hürriyet odur. Bu hürriyetin sınırsız olması gerekir. Bilim ne bir dogmaya, ne bir partiye, ne bir tutkuya, ne bir faydaya, ne önceden edinilmiş bir düşünceye boyun eğmelidir. Çünkü bilim için, boyun eğmek, kendi varlığından vazgeçmek olacaktır. Onu önlemeye kalkışan her zorlama verimsiz ve menfurdur. Bir deneyin, bir düşüncenin yararlı olup olmadığına karar vermek için kurallar koyabilecek bir otorite yoktur.

Tanrıların bilim ağacına dokunmayı yasakladığını sanmıyorum. Çünkü, olağanüstü bir iş yapan her varlık, yaptığı güzel şeyin görünmesini, bilinmesini ister.

Bilim adamlarının ateşte yakılmaları son bulmuş olsa bile, düşüncelerinden ötürü cezalandırılan insanlar halâ vardır. Düşünceleri için insanların hayatlarının ve hürriyetlerinin feda edilmesi nadir olsa bile, açık enginizisyoncular olma cesaretini gösteremeyen riyakar zalimler, düşünce üretenlere karşı bin türlü sinsi tezvirlerin kaynağı olmaya devam etmektedirler. Bu olgu, bilim adına çok kötüdür. Gözleri açmak için, gerçeği söylemek için bir kahraman olmak gerektiği zamanlarda, gözünü ve sözünü dürüstçe kullanacak çok az kişi bulunacaktır. Bundan daha tehlikelisi, bu ortamlarda, gerçeği söyleyemediği için susmak yerine, kendini ve bizi gerçek dışı sözleriyle aldatacak insanların çoğalmasıdır. Bunlardan bazıları bilinç dışı olarak, gerçekler yerine, görülmesi en az tehlikeli olanı görmeye başlayacaklardır.

O halde, düşünce üzerine yapılan her meşru veya sosyal baskının ortadan kalkması gerekir.

Ancak bütün bunlar dış hürriyetten başka bir şey değildir. Bilimin özgürlüğüne yetmez. En kötü zincirler kendimiz için dövdüğümüz zincirlerdir. Bilim adamının kurtulması gereken esas zincir kendi kendine vurduğu zincirdir. Hepimiz kendilerine borçlu olduğumuzu düşündüğümüz saygıdeğer üstatların bize öğrettikleri bazı görüşleri içimizde taşırız. Olguları incelerken, önceden edindiğimiz bilgilere aykırı durumlarla karşılaştığımızda kendi içimizde anlaşmazlığa düşmüyor muyuz? Önceden inandığımız şeylere aykırı olan olguları dürüstçe açığa vurmanın suç olacağı duygusunu kendi içimizden atabilir miyiz? Bir çok ünlü bilginin karşı karşıya geldiği durum budur. Böyle durumlarda, bilgin, karşılaştığı yeni olgularla önceden edindiği inaçlarını ya da peşin hükümlerini tarafsız ve eleştirel bir gözle ayırt edebiliyor mu? Olgular önceden edindiği inanlara ters düştüğünde, onları bir yana bırakıp, gördüğü gerçeği apaçık ortaya koyma cesaretini gösterebiliyor mu? Bunu yapabilmek için, sahip olduğumuzdan daha çok cesarete ve özgür bir iradeye gereksinim vardır. Ne yazık ki bu tür insanlar azdır. Olgular arasından seçim yaparken, gerçeğe yakınlığına değil, kendince en makul olanı seçen bilgin, seçtiğini gerçek sanacak ve buna başkalarını inandırmaya kalkışacaktır. İnanarak yapılan bu iş, riyakâr bilginin yaptığından daha tehlikelidir.

Kaynakça

[1] H.Poincare, “Bilimin Değeri”, Fransız Klâsikleri 168, MEB, 1949, Ankara.

[2] H.Poincare, “Son Düşünceler”, Batı Klâsikleri 525 - 91, MEB, 1986, İstanbul.