

"Cumhuriyet Bilim Teknik, Kasım 1999"

## GÖDEL NE YAPTI?

*Timur Karaçay*  
*Başkent Üniversitesi, Ankara*  
[tkaracay@baskent.edu.tr](mailto:tkaracay@baskent.edu.tr)

Cumhuriyet Bilim ve Teknik'in 30 Ekim 1999 günlü sayısında Sayın Turgut Gürer, Gödel'in matematikçilerin bile zor anladığı Tutarsızlık İlkesi'ni cesaretle ele alıp konunun uzmanı olmayan okurlara açıklamaya çalışmıştır. Bu çabasını kutluyoruz. Ancak, Gödel'in yaptığı iş popülerize edilirken, matematik tutarsızmış izlenimi verilmiştir. Oysa, matematik insanoğlunun 6000 yılda yarattığı en doğru, en değişmez, en kalıcı bilim dalıdır. Soyut sanat açısından bakıldığında da, yüksek estetik değerlere sahiptir.

Böyle bir esere haksızlık etmemek için, Kurt Gödel'in ne yaptığını okurlara yeniden açıklamakta yarar görüyoruz.

Bir teoremin ispatı açıkça görülebilir ya da doğrudan denetlenebilir ve tekrarlanabilir olmalıdır. Daha açıkçası ispat, denetlenebilen, incelenebilen, rasyonel olarak doğrulanabilen bir yapıdır. Dolayısıyla, bir gözönüne serme, bir sonucun ortaya çıkarılmasıdır. Matematikte ispat için yürütülen usavurma yöntemi oldukça kalıplaşmıştır.

Bilindiği gibi bir matematik sistem, belit (ilksav, aksiyom) adı verilen ve başlangıçta ispatsız kabul edilen az sayıda kurallar (önermeler) grubundan üretilir. Bu üretme ya da yaratma işi, iki-değerli mantıkta tündengelim diye adlandırılan ve  $p \rightarrow q$  ( $p$  önermesi  $q$  önermesini gerektirir) simgesiyle ifade edilen çıkarım kuralıyla yapılır.  $p$  önermesine öncül,  $q$  önermesine vargı denilir. Mantık, buradaki  $p$  ve  $q$  önermelerinin doğru olup olmadıklarıyla ilgilenmez; yalnızca "eğer  $p$  doğru ise  $q$  da doğrudur" savının geçerli olup olmadığı ile ilgilenir.  $p$  ve  $q$ 'nun doğru olup olmaması ilgili bilim dallarının konusudur.

Örneğin, "Karabaş bir köpektir; öyleyse Karabaş memeli bir hayvandır" çıkarımındaki öncül ve vargı önermelerinin doğru olup olmaması mantığın değil zooloji biliminin konusudur.

Belitlerden başlayarak, yukarıda anlatılan  $p \rightarrow q$  çıkarım kuralıyla elde edilen her sonuç matematikte bir teoremdir. Bu yolla elde edilen teoremlerin doğruluğundan hiç kimse şüphe edemez. Çünkü istenildiğinde her teoremin ispatı yeniden yapılabilir; yani doğruluğu her an kanıtlanabilir. Öyleyse insanoğlunun 6000 yılda yarattığı matematiksel vargıların (sonuçların, teoremlerin) tutarsız olduğunu hiç kimse iddia edemez. Zaten Kurt Gödel de matematikte yaratılan teoremlerin tutarsızlığını asla söylemiyor.

Gödel 1931 yılında iki önemli sonuç vermiştir. Bunlardan birisi Kararsızlık (undecidability) İlkesi ya da Tutarsızlık (inconsistency) İlkesi diye bilinir. İkincisi ise Eksiklik (incompleteness) İlkesi'dir. Bu sonuçlar, 20. yy. Matematiğine yapılan en büyük katkılardandır. Bu katkıları ona, Aristo'dan sonra en büyük mantıkçı ünvanını kazandırmıştır. Gödel'in ortaya koyduğu sonuçları, fazlaca teknik ayrıntı gerektiren ve matematikçi olmayanları çok ilgilendirmeyen ispatlarına girmeden açıklamak amacımız için yeterli

olacaktır.

Gödel'in Kararsızlık (Undecidability) [Tutarsızlık (Inconsistency)] İlkesi ve Eksiklik (Incompleteness) İlkesi adı verilen sonuçları, birbirlerine denk farklı birçok teoremle ifade edilebilir. Bazıları aşağıda verilmiştir.

### Kararsızlık (Tutarsızlık) İlkesi

Bir belitsel sistemin tutarlılığı o sistem içinde ispatlanamaz. Bir belitsel sistem, kendi kendisinin tutarlılığını kanıtlayamaz. Kümeler kuramının tutarlılığını gösteren bir prosedür yoktur

### Eksiklik İlkesi

Bir belitsel sistem, o sistemin bütün doğrularını içermez. Bir belitsel sistem içerisinde ispatlanamayacak doğru ifadeler vardır. Eğer formal kümeler kuramı tutarlı ise, sistem içerisinde doğruluğu ve yanlışlığı ispatlanamayan teoremler vardır.

Burada belitsel sistem deyimi, çıkarım kuralıyla şimdiye kadar üretilmiş teoremlerden çok çok fazlasını içeren heyula bir kümedir. Sayılamaz sonsuz çoklukta olduğu için, sistemdeki teoremler birer birer atılarak sistem boşaltılamaz. Bir başka deyişle, çıkarım kuralıyla sistemdeki her teoreme ulaşamaz.

Gödel'in sonuçları ortaya atılmadan önce, Bertrand Russell, bütün matematiğin tutarlı olduğunu; yani çelişki içermediğini kanıtlamak için çok uğraşmıştı. David Hilbert ise, aritmetiğin tutarlı ve her problemin çözülebilir olduğuna inanıyor ve ispat etmeye uğraşıyordu. Dolayısıyla Tutarsızlık İlkesi'nin ortaya çıkışının, onlarla birlikte bir çok matematikçiyi hayal kırıklığına uğrattığı bir gerçektir. Ancak, bilmemiz gereken gerçek şudur: Mantık kurallarıyla elde edilen bütün teoremler doğrudur. Üstelik, Russell'in 1902'de "The Study of Mathematics" adlı eserinde yazdığı gibi, varolan herhangi bir matematiksel sonuç, geriye doğru izlenerek, en başta kabul edilen belitlerden çıkarılabilir. Gödel'in sonuçları, ispatı varolan teoremler için hiç bir şey söylemez.

Öte yandan, bir kadının "Ben en güzelim" demesi gerçeği ne kadar yansıtırsa, bir belitsel sistemin "Ben tutarlıyım" demesi de gerçeği o kadar yansıtır. Söz konusu Kkadının en güzel olduğuna kendisi değil, başkası karar vermelidir. Ama o başkası, evrensel estetik değerlere sahip olmayabilir. Dolayısıyla, onun kararının doğruluğuna gene bir başkası karar vermelidir. O bir başkasının kararının doğruluğuna, gene bir başkası karar vermelidir. Bu adımlar sonsuza dek yineleneceğinden bitirilemez. Demek ki söz konusu kadının en güzel olduğuna karar verilemez.

Benzer usa vurmaya, bir belitsel sistemin tutarlılığına da karar verilemeyeceği ortaya çıkar. Bir belitsel sistemin tutarlılığına o sistemin kendisi değil, bir başka sistem karar vermelidir. O başka sistemin kararının doğruluğuna, gene bir başka sistem karar vermelidir. Bu süreç sonsuza dek uzayacağı için, bir belitsel sistemin tutarlılığına asla karar verilemez. Peki varılan bu sonuç çok mu kötü? Zaman geçtikçe bir çok matematikçi Gödel'in sonuçlarını, matematiğin ve dolayısıyla bilimin bitmediğini, bitirilemeyeceğini göstermesi açısından olumlu görmeye başlamıştır. Eğer matematik tutarlı ve eksiksiz olsaydı, bir zaman gelecek mümkün bütün matematiksel sonuçlar ispatlanmış olacaktı. O noktadan sonra matematikte

ve dolayısıyla bilimde yeni gelişmeler olanaksız olacaktı. Böyle bir sonuç, geleceğin uygarlıkları için hiç de arzu edilmez. Öyleyse karamsarlığı bırakalım. Kararsızlık ve Eksiklik ilkeleri, matematiğin henüz bitmediğini, önümüzdeki binlerce milyonlarca yıllarda daha yapılacak çok iř olduğunu göstermektedir. Bu da gelecek kuşaklar için umut vericidir.