

Bölüm 1

SAYILABİLİR KÜMELER

Bölüm 17

1.1 EŞGÜÇLÜ KÜMELER

1.2 PROBLEMLER

1. Öklid düzlemindeki rasyonel koordinatlı noktalar kümesinin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi sayılabilir bir kümedir (bkz. Sonuç 17.3.3). Öklid düzlemindeki rasyonel koordinatlı noktaların kümesini

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(p, q) | p, q \in \mathbb{Q}, q \neq 0\}$$

kümesidir. Sayılabilir sonsuz iki kümenin kartezyen çarpımı sayılabilir (bkz. Teorem 17.3.4) olduğundan istenen sonuç ortaya çıkar.

2. Gerçel eksen üzerinde, birbirini kesmeyen aralıklardan oluşan her ailenin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

Gerçel eksen üzerindeki her aralık en az bir rasyonel nokta (dolayısıyla sonsuz sayıda rasyonel nokta) içerir. Kesilmeyen aralıklar ailesini $\mathcal{J} = \{I_i : i \in I\}$ gösterelim. her I_i aralığından bir tek q_i rasyonel sayısı seçelim. $A = \{q_i : i \in I\}$ kümesini düşünelim. $f : A \rightarrow I$ fonksiyonu $f(q_i) = i$ biçiminde tanımlansın. f fonksiyonu bire bir ve örtendir. O halde $A \approx I$ olur. Öte yandan, A nın her ögesi bir rasyonel sayı olduğundan $A \subset \mathbb{Q}$ dur. Teorem 17.3.1 gereğince A sayılabilir. O halde A ya eşgüçlü olan I kümesi de sayılabilir. Tanımı gereğince $\mathcal{J} \approx I$ dir. $A \approx I \approx \mathcal{J}$ eşgüçlülükleri istenen sonucu verir.

3. Bir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ olacak şekilde veriliyor. f fonksiyonunun süreksizlik yerlerinin sayılabilir bir küme oluşturduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

f kesinkes artan bir fonksiyon olduğundan f nin her x_i süreksizlik noktasına karşılık $Y = f(\mathbb{R})$ değerler kümesinde bir I_i sıçrama aralığı oluşur. Bu aralıklar kesişmezler. O halde, önceki problem gereğince, bu aralıklar sayılabilir sayıdadır. Bu aralıklarla süreksizlik noktaları bire bir eşleştigiğinden, f nin süreksizlik noktaları sayılabilir çokluktur.

4. Sayılabilir bir kümeyi, birbirlerinden ayrık sayılabilir tane sayılabilir kümelerin bileşimi olarak yazınız.

ÇÖZÜM:

A sayılabilir sonsuz bir küme olsun. A üzerinde $a \approx b \Leftrightarrow a = b$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntının denklik sınıfları kümesi A nın bir ayrışımıdır. Buna $\mathcal{D}$ diyelim. Her $\bar{a} \in \mathcal{D}$ denklik sınıfından bir tek temsilci öge seçerek oluşturulacak $B = \{a : a \in \bar{a} \text{ kümesi } A \text{ nın bir alt kümesidir.}$ A sayılabilir olduğundan B kümesi de sayılabilir. Seçimimiz gereğince $B \approx \mathcal{D}$ dir. Öyleyse $\mathcal{D}$ sayılabilir.

5. Doğru ya da düzlem üzerinde ancak sonlu tane yığılma noktasına sahip sonsuz bir noktalar kümesi veriliyor. Bu kümenin sayılabilir olduğunu ve ifadenin karşıtının doğru olamayacağını bir örnekle gösteriniz.

ÇÖZÜM:

Sözkonus kümeye A diyelim. A sonlu tane yığılma noktasını atalım. Geri kalan kümeye B diyelim. B sonsuz bir kümedir ve hiç bir yığılma noktası yoktur. Eğer A sayılamayan sonsuz bir küme ise B kümesi de sayılamayan sonsuz bir küme olur. Oysa $\mathbb{R}$ de sayılamayan sonsuz ve sınırlı her kümenin en az bir tane yığılma noktası vardır; yani B nin en az bir yığılma noktası olmalıdır. Bu çelişki olamayacağından A sayılabilir.

Bunun karşıtı genel olarak doğru değildir. Örneğin, doğal sayılar sayılabilir, ama hiç bir yığılma noktası yoktur.

6. Rasyonel sayılardan gerçel sayıları kurmanın başka bir yolu topolojik yöntemdir. Terimleri rasyonel sayılar olan Cauchy dizilerini $\mathcal{D}$ ile gösterelim. $\mathcal{D}$ kümesi üzerinde, aynı limite giden dizileri denk sayan bir denklik bağıntısı kurulabilir. Bu bağıntının denklik sınıflarının oluşturduğu küme *gerçel sayılar* kümesidir.

Gerçel sayılar kümesi üzerinde *toplama*, *çıkarma*, *çarpma* ve *bölme* işlemleri, dizilerin analizden bilinen işlemleri yardımıyla tanımlanabilir. Bunu yapmayı deneyiniz.

ÇÖZÜM:

$a, b \in \mathbb{R}$ ise $a = \lim a_n$ ve $b = \lim b_n$ olan (a_n) ve (b_n) Cauchy dizileri vardır. Analizden bilindiği gibi

$$a \pm b = \lim a_n \pm \lim b_n = \lim(a_n \pm b_n), \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$a \cdot b = \lim a_n \cdot \lim b_n = \lim(a_n \cdot b_n), \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}, \quad (\lim b_n \neq 0), \quad (n \rightarrow \infty)$$

bağıntılarıyla dört işlem tanımlanabilir.