CEVAPLAR

ALIŞTIRMALAR 15

1. a. $\{0\} \oplus \mathbb{Z}$ ideal

b. $\{(t,t) : t \in \mathbb{Z}\}$ ideal değil

c. $2\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}$ ideal

3. $0 \in A$; $a_1,\ a_2 \in A \Longrightarrow a_1x = b_1y$ ve $a_2x = b_2y$ olacak biçimde $b_1,\ b_2 \in H$ vardır. Bu durumda, $(a_1 - a_2)x = (b_1 - b_2)y$ olacağından, $a_1 - a_2 \in A$ olur. Ayrıca, $u \in H$ ve $a \in A$ ise, $ax = by$ olacak biçimde bir $b \in H$ vardır. Bu durumda, $(au)x = (ua)x = u(ax) = u(by) = (bu)x$ olacağından, $au = ua \in A$ olur.

5. A ideal değil, çünkü $f(x) = x + 2$, $g(x) = x + \frac{1}{2}$ ile tanımlanan $f \in A$ ve $g \in H$ fonksiyonları için $fg \notin A$.

7. F bir cisim, $x \in F \setminus \{0\}$ ise, $< x >=< 1 >$ dir.

9. $< 14, 21 >=< 7 >$.

11. $0 \in AB$; $\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i,\ \sum\limits_{j=1}^{m} a'_jb'_j \in AB$ alalım. Her $i = 1, \ \ldots\ , m$ için $a'_i = -a_{n+i},\ b'_i = b_{n+i}$ tanımlanırsa, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i - \sum\limits_{j=1}^{m} a'_jb'_j = \sum\limits_{i=1}^{n+m} a_ib_i \in AB$; $x \in H$ için $x(\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} (xa_i)b_i \in AB$, $(\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i)x = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(b_ix) \in AB$.

13. $A + B = H$ olduğundan, $a_0 \in A$ ve $b_0 \in B$ olmak üzere $1 = a_0 + b_0$ dir. Dolayısıyla, her $z \in A \cap B$ için $z = z(a_0 + b_0) = za_0 + zb_0 = a_0z + zb_0 \in AB$ dir.

15. $\mathbb{Z}_{24}$ halkası içinde $\sqrt{<0>} =< 12 >$, $\sqrt{<2>} =< 2 >$ ve $\sqrt{<8>} =< 4 >$; $\mathbb{Z}_{36}$ içinde $\sqrt{<0>} =< 6 >$, $\sqrt{<4>} =< 2 >$ ve $\sqrt{<6>} =< 6 >$.

17. $k + 8\mathbb{Z} = \underline{k}$ gösterimi ile işlem tabloları

$+$	$\underline{0}$	$\underline{2}$	$\underline{4}$	$\underline{6}$
$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{2}$	$\underline{4}$	$\underline{6}$
$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{4}$	$\underline{6}$	$\underline{0}$
$\underline{4}$	$\underline{4}$	$\underline{6}$	$\underline{0}$	$\underline{2}$
$\underline{6}$	$\underline{6}$	$\underline{0}$	$\underline{2}$	$\underline{4}$

$\cdot$	$\underline{0}$	$\underline{2}$	$\underline{4}$	$\underline{6}$
$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$
$\underline{2}$	$\underline{0}$	$\underline{4}$	$\underline{0}$	$\underline{4}$
$\underline{4}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$
$\underline{6}$	$\underline{0}$	$\underline{4}$	$\underline{0}$	$\underline{4}$

birim eleman yok.

19. $< x^2 + 1 >$, $\mathbb{R}[x]$ in maksimal idealidir(Bak. Örnek 10 ve Teorem 5). $(a+bx)+ < x^2+1 > \neq 0+ < x^2+1 >$, yani $a+bx \notin < x^2+1 >$ ise, $a^2+b^2 \neq 0$ olup $(a+bx)+ < x^2+1 >$ in tersinin

$$((a+bx)+ < x^2+1 >)^{-1} = (\tfrac{a}{a^2+b^2} - \tfrac{b}{a^2+b^2})+ < x^2+1 >$$

olduğu görülür.

21. H/A nın her ideali; J, H nin A yı kapsayan bir ideali olmak üzere, J/A biçimindedir. $J =< x >$ ise, $J/A =< x + A >$ dır.

23. A nın ideal olduğunu görmek kolaydır. (a,b), $(c,d) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $(a,b)(c,d) \in A \Longrightarrow bd = 0 \Longrightarrow b = 0$ veya $d = 0 \Longrightarrow (a,b) \in A$ veya $(c,d) \in A$ gözlemi, A nın asal olduğunu gösterir. A maksimal değildir, çünkü $J = \mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ nin bir ideali olup $A \subset J \subset \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ dir.