BÖLÜM **15**

İDEALLER VE BÖLÜM HALKALARI

Bu bölümü bitirdiğinizde,

- halkalarda idealler
- bölüm halkaları
- bir halkanın bir altkümesinin ürettiği ideal
- sonlu üretilmiş idealler
- tek üreteçli idealler
- asal idealler
- maksimal idealler

hakkında bilgi sahibi olabileceksiniz.

BÖLÜM 15

İDEALLER VE BÖLÜM HALKALARI

Gruplar için normal altgruplar yardımıyla bölüm grupları oluşturuyoruz. Her halka bir toplamsal Abel grubu olduğuna göre, bir halkanın herhangi bir althalkasına göre (toplamsal) bölüm grubu düşünülebileceği açıktır. Bir H halkası ve onun bir A althalkası verildiğinde, H, toplamsal Abel grubu ve A, onun altgrubu olarak düşünülünce,

$$H/A = \{x + A : \ x \in H\}$$

da bir toplamsal Abel grubu olur. Eşküme toplamının

$$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$$

biçiminde tanımlandığını anımsayınız. Acaba H nin çarpma işlemi, eşkümeler üzerinde bir ikili işlem indirger mi? Eşdeğer deyişle,

$$(x + A)(y + A) = (xy) + A \ ,$$

H/A üzerinde bir ikili işlem tanımlar mı? Bu sorunun yanıtı, bazı althalkalar için olumlu, bazıları için ise olumsuzdur.

Örnek 1. $H = \mathbb{Z}$ ve $A = n\mathbb{Z}$, $n \geq 1$ alalım. Bu takdirde, $x, y \in \mathbb{Z}$ için

$$(x + n\mathbb{Z})(y + n\mathbb{Z}) = (xy) + n\mathbb{Z},$$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ üzerinde bir ikili işlemdir (Nedeni üzerinde düşününüz). $\square$

Örnek 2. $H = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \{\begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} : \ x \in \mathbb{R}\}$ olsun. Bu takdirde, H nin çarpma işlemi, H/A üzerinde bir ikili işlem indirgemez. Bunu görmek için, H nin, $m = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $m_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $r_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ elemanlarını alalım. Kolayca görülebileceği üzere, $m - m_1 \in A$, $r - r_1 \in A$, fakat $mr - m_1r_1 \notin A$ dır. Diğer bir ifadeyle, $m + A = m_1 + A$, $r + A = r_1 + A$, fakat $mr + A \neq m_1r_1 + A$ dır. □

Hangi althalkalar için çarpma işlemi eşkümelere taşınabilir? Bu sorunun yanıtı araştırılırken aşağıdaki kavram ortaya çıkar.

Tanım 1. H bir halka, A onun bir althalkası olsun. Eğer her $a \in A$ ve $x \in H$ için $ax \in A$ ve $xa \in A$ ise, A ya H nin bir *ideal*i denir. □

H nin bir A althalkası ve $x \in H$ için

$$xA = \{xa : a \in A\} \quad \text{ve} \quad Ax = \{ax : a \in A\}$$

tanımlayalım. Bu takdirde, A nın H içinde bir ideal olması için gerek ve yeter koşul, her $x \in H$ için $Ax \subseteq A$ ve $xA \subseteq A$ olmasıdır. H nin bir althalkasının ideal olup olmadığı, aşağıdaki teoremde verilen pratik yolla kolayca belirlenebilir.

Teorem 1. *H bir halka, $A \subseteq H$ olsun. A nın, H nin bir ideali olması için aşağıdaki üç koşul gerekli ve yeterlidir:*

(i) $0 \in A$,

(ii) $a, b \in A \Rightarrow a - b \in A$,

(iii) $a \in A,\ x \in H \Rightarrow ax,\ xa \in A$.

Kanıt. Teorem 13.3'te verilen, althalkalarla ilgili sonuç ve ideal tanımı kullanılarak gerçekleştirilebilecek olan bu kanıt okuyucuya alıştırma olarak bırakılmıştır. ■

Örnek 3. Her H halkası için $\{0\}$ ve H, H nin idealleridir. □

Tanım 2. $\{0\}$ idealine, H nin *sıfır ideal*i denir. H nin, $A \neq H$

koşulunu sağlayan bir A idealine, H nin *özideali*; H ye ise H nin *özolmayan ideali* denir. $\Box$

Örnek 4. Her $n \geq 1$ için $n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ nin bir idealidir. $\Box$

Örnek 5. $A = \{f \in \mathcal{S}[0,1] : \ f(1/2) = 0\}$, $\mathcal{S}[0,1]$ in bir özidealidir. Gerçekten, Teorem 1 deki koşulların hepsi sağlanmakta olup $A \neq \mathcal{S}[0,1]$ dir. Bununla beraber, $B = \{f \in \mathcal{S}[0,1] : \ f, \ x = \frac{1}{2}$'de türevli $\}$ kümesi, $\mathcal{S}[0,1]$ in bir ideali değildir. Çünkü, örneğin,

$$h(x) = \begin{cases} 1 - 2x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & , \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

ile tanımlanan $h \in \mathcal{S}[0,1]$ fonksiyonu ve $1(x) = 1$ ile tanımlanan, B nin elemanı olan, birim fonksiyon için $h \cdot 1 \notin B$ dir. $\Box$

H bir halka, A onun herhangi bir althalkası; $x, y, r, s \in H$ olsun. Eğer $x + A = r + A$ ve $y + A = s + A$ ise, $x - r \in A$ ve $y - s \in A$ olur. Eğer ek olarak A, H nin bir ideali ise, $(x - r)y \in A$ ve $r(y - s) \in A$ ve dolayısıyla, $(x - r)y + r(y - s) = xy - rs \in A$ olur. Sonuç olarak, $xy + A = rs + A$ olduğu görülür. Şu halde, eğer A althalkası H nin ideali ise, H nin çarpma işlemi, eşkümelere taşınabilir. Karşıt olarak, H nin çarpma işlemi A nın H içindeki eşkümelerine taşınabiliyorsa, $a \in A$ ve $x \in H$ elemanları verildiğinde $a + A = 0 + A$ ve $x + A = x + A$ olduğundan, $ax + A = (a + A)(x + A) = (0 + A)(x + A) = 0 + A = A$, $xa + A = (x + A)(a + A) = (x + A)(0 + A) = 0 + A = A$ ve böylece, $ax \in A$, $xa \in A$ olduğu görülür ki bu, A nın bir ideal olduğunu gösterir.

Yukarıda elde edilen sonuçları bir teorem olarak ifade ediyoruz:

Teorem 2. *H bir halka; A onun bir althalkası ise, aşağıdakiler denktir:*

(i) A, H nin bir idealidir.

(ii) H nin çarpma işlemi H/A üzerinde bir ikili işlem indirger. $\blacksquare$

Böylece, H bir halka ve A onun bir ideali ise, $< H/A, +, \cdot >$ cebirsel yapısından söz edebiliriz.

Teorem 3. *H bir halka ve A onun bir ideali olsun. Bu takdirde,*

(i) H/A bir halkadır.

(ii) H değişmeli halka ise, H/A da değişmeli halkadır.

(iii) H birimli ve $A \neq H$ ise, H/A birimlidir ve bu durumda H/A nın birim elemanı $1_H + A$ dır.

Kanıt. (i) Gruplarla ilgili çalışmalarımızdan, $< H/A, + >$ nın bir Abel grubu olduğunu biliyoruz. Eşkümeler için çarpım tanımından, $x, y, z \in H$ için

$$\begin{aligned}(x + A)((y + A)(z + A)) &= (x + A)((yz) + A) = x(yz) + A \\ &= (xy)z + A = ((xy) + A)(z + A) \\ &= ((x + A)(y + A))(z + A)\end{aligned}$$

olduğu ve böylece, $< H, \cdot >$ nın birleşme özelliği bulunduğu görülür. Sol ve sağ dağılma özellikleri de benzer biçimde gösterilebilir. Bunu ve kanıtın geri kalan kısmını okuyucuya alıştırma olarak bırakıyoruz. ∎

Tanım 3. H bir halka ve A onun bir ideali ise, H/A ya H nin A idealine göre *bölüm halkası* denir. □

Örnek 6. Örnek 8.8'de olduğu gibi, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ nin elemanlarını [0], [1], [2], [3] ile gösterelim. Bu takdirde, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ nin çarpma işleminin tablosu yanda verildiği gibidir.

	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]
[2]	[0]	[2]	[0]	[2]
[3]	[0]	[3]	[2]	[1]

□

Örnek 7. $H = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$, $A = \{(x, 2y) : x \in \mathbb{Z}_2, \quad y \in \mathbb{Z}\}$ olsun. A nın ideal olduğunu görmek zor değildir (gösteriniz). Ayrıca,

$$H/A = \{(0, 0) + A, \ (0, 1) + A\}$$

dır. Gerçekten, $(a, b) \in H$ ise, $a \in \{0, 1\}$ ve $b = 2k+t$, $k \in \mathbb{Z}$, $t \in \{0, 1\}$ dir. Dolayısıyla, $(a, b) = (0, t) + (a, 2k) \in (0, t) + A$ dır. □

Teorem 4. *H bir halka ve $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$, H nin ideallerinden oluşan bir topluluk olsun. Bu takdirde, $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ de H nin bir idealidir.*

Kanıt. Alıştırma. Teorem 1 i kullanınız. ∎

Tanım 4. H bir halka, $S \subseteq H$ olsun. H nin S yi kapsayan en küçük idealine *H içinde S tarafından üretilen ideal* denir ve bu ideal $< S >$ ile gösterilir. Eğer S sonlu, $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ise, $< S >=< a_1, \ldots, a_n >$ yazılır. A, H nin bir ideali ve $A =< a_1, \ldots, a_n >$ ise, A ideali *sonlu üretilmiş ideal*dir denir; $A = < a >$ olacak biçimde $a \in H$ varsa, A ideali H nin *tek üreteçli ideal*idir denir. □

Eğer $S \subset H$ ise, S nin ürettiği ideal, H nin S yi kapsayan tüm ideallerinin kesişimidir. Eğer H birimli ve değişmeli bir halka ise,

$$< S > = \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j a_j \ : \ n \in \mathbb{N},\ a_j \in S,\ x_j \in H \right\}$$

olduğu açıktır; özel olarak, $a \in H$ için

$$< a > = \{ xa : \ x \in H \}$$

dir.

Örnek 8. Katsayıları reel sayılar olan polinomların oluşturduğu $\mathbb{R}[x]$ halkası içinde $x^2 + 1$ in ürettiği ideal,

$$< x^2 + 1 >= \{f(x)(x^2 + 1) : \ f(x) \in \mathbb{R}[x]\}$$

ve bu ideale göre bölüm halkası,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[x]/ < x^2 + 1 > &= \{g(x)+ < x^2 + 1 >: \ g(x) \in \mathbb{R}[x]\} \\ &= \{ax + b+ < x^2 + 1 >: \ a, b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

dir. Son eşitliği görmek için, $g(x) \in \mathbb{R}[x]$ verildiğinde

$$g(x) = (x^2 + 1)h(x) + (ax + b)$$

olacak biçimde tek türlü belirli $h(x) \in \mathbb{R}[x]$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ bulunduğuna dikkat ediniz. $\mathbb{R}[x]/ < x^2 + 1 >$ içinde toplama ve çarpma işlemleri şöyledir:

$$(ax+b+ < x^2+1 >)+(cx+d+ < x^2+1 >) = (a+c)x+(b+d)+ < x^2+1 >,$$

$$(ax+b+ < x^2+1 >)(cx+d+ < x^2+1 >) = acx^2+(ad+bc)x+bd+ < x^2+1 >$$

$$= (ad+bc)x+(bd-ac)+ < x^2+1 > .$$

Karmaşık sayıların toplama ve çarpma işlemlerini çağrıştırıyor mu? □

Bir halkanın bir idealine göre bölüm halkası, halkanın kendisinin sahip olduğu özelliklerden çok farklı özelliklere sahip olabilir. Bu bölümü, bu durumu yansıtan iki sonuçla kapatacağız. Önce, ideallerle ilgili iki tanım vereceğiz:

Tanım 5. H bir değişmeli halka, A onun bir özideali olsun. Eğer $x, y \in H$ ve $xy \in A$ olunca daima $x \in A$ veya $y \in A$ oluyorsa, A ideali H nin bir *asal ideal*idir denir. Eğer H nin A yı kapsayan, A dan başka, hiç özideali yoksa, A ya H nin bir *maksimal ideal*i denir. □

Örnek 9. $n > 1$ olmak üzere $n\mathbb{Z}$ idealinin $\mathbb{Z}$ nin asal ideali olması için gerek ve yeter koşul, n nin asal olmasıdır. $\{0\}$ ideali de $\mathbb{Z}$ nin bir asal idealidir. $n > 1$ asal ise, $n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ nin aynı zamanda bir maksimal idealidir. □

Örnek 10. $< x^2+1 >$ ideali, $\mathbb{R}[x]$ in bir maksimal idealidir. Gerçekten, $< x^2+1 > \neq \mathbb{R}[x]$ olduğu açıktır. Şimdi, $\mathbb{R}[x]$ in $< x^2+1 >$ idealini kapsayan bir A idealini düşünelim. Eğer $g(x) \in A \setminus < x^2+1 >$ ise,

$$g(x) = (x^2+1)h(x) + ax + b;\ h(x) \in \mathbb{R}[x],\ a, b \in \mathbb{R}$$

ifadesinde $ax + b \in A \setminus < x^2+1 >$ olur. Bu durumda, $ax + b \neq 0$ ve dolayısıyla, $a^2 + b^2 \neq 0$ olur. A, ideal olduğundan,

$$u = (\tfrac{-a}{a^2+b^2}x + \tfrac{b}{a^2+b^2})(ax+b) \in A$$

olmalıdır. Eğer bu çarpım hesaplanırsa,

$$u = \tfrac{-a^2}{a^2+b^2}x^2 + \tfrac{b^2}{a^2+b^2} = \tfrac{-a^2}{a^2+b^2}(x^2+1) + 1 \in A$$

elde edilir.

$\frac{-a^2}{a^2+b^2}(x^2+1) \in < x^2+1 > \subseteq A$ olduğundan,

$$1 = u + \tfrac{a^2}{a^2+b^2}(x^2+1) \in A$$

dır. Bu, $A = \mathbb{R}[x]$ olmasını gerektirir; çünkü, her $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ için $f(x) = f(x) \cdot 1 \in A$ dır. O halde, $< x^2+1 >$ idealini kapsayan, kendisinden başka özideal yoktur; yani $< x^2+1 >$ maksimal idealdir. $\square$

Yukarıdaki örnekler dikkatle izlenirse, asal ideallerle oluşturulan bölüm halkalarının tamlık bölgeleri; maksimal ideallerle oluşturulan bölüm halkalarının da cisimler olduğu görülecektir. Şimdi ifade edeceğimiz teorem, bunun sadece bu örneklere özgü olmadığını, her zaman doğru olduğunu gösterir.

Teorem 5. *H, birimli değişmeli bir halka, A onun bir ideali olsun. Bu takdirde,*

(i) A, H nin bir asal idealidir $\Longleftrightarrow$ H/A bir tamlık bölgesidir.

(ii) A, H nin bir maksimal idealidir $\Longleftrightarrow$ H/A bir cisimdir.

(iii) A, H nin maksimal ideali ise, A asal idealdir.

Kanıt. $(i) \Longrightarrow$ A, H nin bir asal ideali olsun. H/A nın değişmeli bir halka olacağını biliyoruz. $1_H + A$, H/A nın birim elemanıdır. A, özideal olduğundan, $1_H + A \neq 0_H + A$ dır. Ayrıca, $x + A$, $y + A \in H/A$ için

$$\begin{aligned}(x+A)(y+A) = 0 + A &\Longrightarrow xy + A = 0 + A \Longrightarrow xy \in A \\ &\Longrightarrow x \in A \text{ veya } y \in A \\ &\Longrightarrow x + A = 0 + A \text{ veya } y + A = 0 + A\end{aligned}$$

olduğundan, H/A nın hiç sıfır-böleni yoktur.

$(i) \Longleftarrow$ A, H nin bir ideali; H/A, bir tamlık bölgesi olsun. Bu durumda $A \neq H$ dir, çünkü, aksi halde $H/A = \{0_H + A\}$ olurdu. Şimdi, $x, y \in H$ ve $xy \in A$ olsun. Bu takdirde, $(x+A)(y+A) = xy+A = 0+A$ ve H/A nın hiç sıfır-böleni bulunmadığından, $x + A = 0 + A$ veya

$y + A = 0 + A$; başka bir deyişle, $x \in A$ veya $y \in A$ olması gerekir. Bu, A nın asal olduğunu kanıtlar.

$(ii) \Longrightarrow$ A, H nin bir maksimal ideali olsun. Bu takdirde, H/A, birim elemanı $1_H + A$ olan birimli, değişmeli halkadır ve $1_H + A \neq 0_H + A$ dır. İddiayı kanıtlamak için, $x + A \in H/A$, $x + A \neq 0 + A$ alalım. Bu takdirde, $x \notin A$ dır. Şimdi, $B = \{hx + a : h \in H, a \in A\}$ kümesini alalım. B nin, H içinde $\{x\} \cup A$ nın ürettiği ideal olduğu açıktır. Ayrıca, $x \notin A$ olduğundan, $B \supset A$ dır. A maksimal olduğundan, $B = H$ olmalıdır. Bu nedenle, $1 \in B$ ve dolayısıyla, $1 = hx + a$ olacak biçimde $h \in H$ ve $a \in A$ bulunmalıdır. Bu h elemanı için $hx - 1 \in A$ olduğundan, $1 + A = hx + A = (h + A)(x + A)$; sonuç olarak, $x + A$, H/A içinde tersinir (tersi $h + A$ dır).

$(ii) \Longleftarrow$ A, H nin bir ideali ve H/A, bir cisim olsun. Bu takdirde, $A \neq H$ dir. $A \subset B \subseteq H$ koşulunu sağlayan bir B ideali, $b \in B \backslash A$ alalım. $b + A \neq 0 + A$ olduğundan, $b + A$ elemanı H/A içinde tersinir. $b + A$ nın H/A daki tersi $c + A$ olsun. Bu durumda, $(b + A)(c + A) = bc + A = 1 + A$; dolayısıyla, $1 - bc \in A \subset B$ olur. Ancak, $b \in B$ olduğundan, $bc \in B$ dir. Bu nedenle, $1 = (1 - bc) + bc \in B$ dir. Bu ise, $B = H$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak, A maksimaldir.

(iii) Her cisim bir tamlık bölgesidir. ∎