

CEVAPLAR

ALIŞTIRMALAR 14

1. a. \mathbb{Z}_6 nin sıfır-bölenleri: 2, 3, 4.

b. $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_6$ nin sıfır-bölenleri: $[(\{0\} \oplus \mathbb{Z}_6) \cup (\mathbb{Z} \oplus \{0, 2, 3, 4\})] \setminus \{(0, 0)\}$.

c. $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6$ nin sıfır-bölenleri: $[(\{0, 2\} \oplus \mathbb{Z}_6) \cup (\mathbb{Z}_4 \oplus \{0, 2, 3, 4\})] \setminus \{(0, 0)\}$.

d. $f, g \in \mathcal{S}[0, 1]$ için $fg = 0 \iff f(x)g(x) = 0 \forall x \in [0, 1]$ gözlemi $\mathcal{S}[0, 1]$ in sıfır bölenleri hakkında fikir verecektir.

3. $(xy)a = 0, a \neq 0$ olsun. Eğer $ya = 0$ ise, y sıfır-böleni; $ya \neq 0$ ise, $x(ya) = 0$ olduğundan x sıfır-böleni.

5. $a \in H, a \neq 0, K = \{ab : b \in H\}$ olsun. a tersinir değilse, $K \neq H$ olup $b_1 \neq b_2$ ve $ab_1 = ab_2$ olacak biçimde $b_1, b_2 \in H$ vardır. Bu durumda, $a(b_1 - b_2) = 0$ ve dolayısıyla, a sıfır-bölenidir. H sonsuz olunca bu önerme, \mathbb{Z} 'de olduğu gibi, geçersiz olur.

7. $\mathbb{C} = \{x_1 + x_2\mathbf{i} : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$.

9. Önceki alıştırmamızın koşulu, $\bar{2} = 8, \bar{4} = 4, \bar{6} = 6, \bar{8} = 2$ ile sağlanmaktadır.

11. a. $x^2 = x, y^2 = y \implies (xy)^2 = x^2y^2 = xy$.

b. $x^2 = x \implies x^2 - x = 0 \implies x(x - 1) = 0$.

13. T bir tamlık bölgesi, $H \subseteq T$ olsun. T nin ikili işlemleri H nin de ikili işlemi oluyor ve H bu ikili işlemler ile bir tamlık bölgesi oluyorsa, H ye T nin bir *alttamlık bölgesi* denir. H, T nin alttamlık bölgesi ise, (i) ve (ii) nin sağlanacağı açıktır. Karşıt olarak, (i) ve (ii) koşulları

sağlanıyorsa, H , T nin bir toplamsal altgrubu, yani bir Abel grubu olur; 1 , H nin birim elemanıdır; T nin çarpma işlemi H nin de çarpma işlemidir. Ayrıca, T nin sahip olduğu birleşme, değişme ve sıfır-bölensiz olma özellikleri H için de geçerlidir.

15. a. (i) $0, 1 \in A$; (ii) $x, y \in A \implies x = n \cdot 1, y = r \cdot 1 \implies x - y = (n - r) \cdot 1, xy = (nr) \cdot 1 \in A$.

b. D , T nin alttamlik bölgesi ise, her $n \in \mathbb{Z}$ için $n \cdot 1 \in D$.

c. A sonlu ise, $\{k \in \mathbb{N} : k \cdot 1 = 0\} \neq \emptyset$. $k \cdot 1 = 0$ olan en küçük doğal sayı, $|A|$ dir ve aynı zamanda T nin karakteristiğidir.

d. D nin karakteristiği, A sonlu ise sıfır, aksi halde $|A|$ dir.

17. a. $\text{kar}(\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6) = \text{okek}(4, 6) = 12$

b. $\text{kar}(\mathbb{Z}_4 \oplus 6\mathbb{Z}) = 0$

c. $\text{kar}(\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{15}) = \text{okek}(6, 15) = 30$.

19. (i) $0, 1 \in P$; (ii) $x, y \in P \implies x^p = x, y^p = y \implies (x - y)^p = x^p - y^p = (x - y), (xy^{-1})^p = x^p(y^{-1})^p = xy^{-1} \implies x - y, xy^{-1} \in A$.

21. $x \in F \setminus \{0, 1\}$ olsun. Bu takdirde, $(x + 1)^3 = (x + 1)(x + 1)^2 = (x + 1)(x^2 + 1) = x^3 + x^2 + x + 1$. $x^2 + x \neq 0$ olduğundan, $(x + 1)^3 \neq x^3 + 1$.