ALIŞTIRMALAR 14

1. Aşağıdaki halkalardan her birinin tüm sıfır-bölenlerini bulunuz.

a. $\mathbb{Z}_6$ **b.** $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_6$ **c.** $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6$ **d.** $\mathcal{S}[0,1]$

2. Kısaltma kuralı $(x, y, z \in H,\ x \neq 0,\ xy = xz \Longrightarrow y = z)$ na sahip olan bir değişmeli halkanın hiç sıfır-böleni bulunmadığını kanıtlayınız.

3. H, bir değişmeli halka; $x,\ y \in H$ olsun. Eğer xy sıfır-böleni ise, x ve y den en az birinin sıfır-böleni olduğunu kanıtlayınız.

4. Öyle bir H halkası ve bu halkanın sıfırdan farklı öyle bir elemanını bulunuz ki bu eleman ne tersinir ne de sıfır-böleni olsun.

5. H, sonlu, birimli ve değişmeli halka ise, H nin sıfırdan farklı her elemanının ya tersinir ya da sıfır-böleni olduğunu kanıtlayınız. H, sonsuz olunca bu önerme doğru olur mu?

6. Kuaterniyonlar halkası K nın aşağıdaki elemanlarını, $x_1 + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k}$ biçiminde ifade ediniz.

a. $(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$ **b.** $(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})^{-1}$

7. Kuaterniyonlar halkası K nın, cisim olan bir althalkasını bulunuz.

8. En az iki elemana sahip olan bir H halkasının sıfırdan farklı her a elemanı için $a\overline{a}a = a$ olacak biçimde tek türlü belirli bir $\overline{a} \in H$ bulunduğuna göre aşağıdakileri kanıtlayınız.

a. H nin hiç sıfır-böleni yoktur.

b. Her $a \in H \backslash \{0\}$ için $\overline{\overline{a}} = a$, yani $\overline{a}a\overline{a} = \overline{a}$ dır.

c. Her $a \in H \backslash \{0\}$ için $a\overline{a} = \overline{a}a$ dır.

d. H, birimli halkadır.

e. H, aykırı cisimdir.

9. $\mathbb{Z}_{10}$ un $F = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ altkümesinin bir cisim olduğunu kanıtlayınız.

10. H, bir halka, $x \in H$ olsun. Eğer $x^n = 0$ olacak biçimde bir $n \geq 0$ varsa, x elemanı H nin bir *sıfırüslü* (nilpotent) elemanıdır denir.

a. H, değişmeli bir halka; $x, y, z \in H$; x ve y sıfırüslü ise, $x + y$ ve xz nin de sıfırüslü olduğunu gösteriniz (*İpucu*: $x + y$ nin kuvvetlerini düşününüz ve Binom Teoremi'nden yararlanınız).

b. H, birimli halka ve $x \in H$ sıfırüslü ise, $(1-x)$ in tersinir olduğunu gösteriniz (*İpucu*: $(1 - x)(1 + x + \cdots + x^{n-1})$ i hesaplayınız).

11. H, bir halka, $x \in H$ olsun. Eğer $x^2 = x$ ise, x elemanına H nin bir *özüslü* (idempotent) elemanı denir.

a. H, bir değişmeli halka; $x, y \in H$ özüslü elemanlar ise, xy nin de özüslü olduğunu gösteriniz.

b. H, bir tamlık bölgesi ise, H nin özüslü elemanlarının 0 ve 1 den ibaret olduğunu gösteriniz.

12. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tüm fonksiyonların oluşturduğu kümeyi H ile gösterelim. H nin noktasal toplama ve çarpma:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad , \qquad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

işlemlerine göre bir birimli değişmeli halka olduğunu gördükten sonra,

a. H nin tüm sıfır-bölenlerini bulunuz,

b. H nin tüm sıfırüslü elemanlarını bulunuz,

c. H nin her bir elemanının ya sıfır-böleni ya da tersinir olduğunu gösteriniz.

13. *Alttamlık bölgesi* kavramı için uygun bir tanım veriniz. T bir tamlık bölgesi, $H \subseteq T$ olsun. H nin, T nin alttamlık bölgesi olması için aşağıdaki iki koşulun gerekli ve yeterli olduğunu kanıtlayınız:

$$(i)\ 1 \in H \qquad\qquad (ii)\ x, y \in H \Longrightarrow x - y \in H \text{ ve } xy \in H.$$

14. Eleman sayısı 6 olan hiç tamlık bölgesi bulunmadığını kanıtlayınız. Eleman sayısı 4 olan bir tamlık bölgesi var mıdır? Eleman sayısı 10 olan bir tamlık bölgesi var mıdır? Bu gözlemleri kullanarak bir sonlu tamlık bölgesinin eleman sayısı ile ilgili bir sonuç geliştiriniz.

15. Birim elemanı 1 olan bir D tamlık bölgesi içinde $A = \{n{\cdot}1 : n \in \mathbb{Z}\}$ ile tanımlanan A altkümesi için aşağıdakileri kanıtlayınız:

a. A, D nin bir alttamlık bölgesidir.

b. D nin her alttamlık bölgesi T için $A \subseteq T$ dir.

c. A sonlu ise, $|A|$ bir asal sayıdır.

d. D nin karakteristiğinin ya sıfır ya da $|A|$ olduğunu gösteriniz.

16. $20 \cdot 1 = 12 \cdot 1 = 0$ eşitlikleri sağlanan bir tamlık bölgesinin karakteristiği kaçtır? Burada $20 \cdot 1$, birim eleman 1 in 20 katını gösterir.

17. Aşağıdaki halkaların her birinin karakteristiğini bulunuz:

a. $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6$ **b.** $\mathbb{Z}_4 \oplus 6\mathbb{Z}$ **c.** $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{15}$

18. *Altcisim* kavramını tanımlayınız. F bir cisim, $K \subseteq F$ olsun. K nın, F nin bir altcismi olması için aşağıdaki iki koşulun gerekli ve yeterli olduğunu kanıtlayınız:

(i) $0, 1 \in K$ (ii) $x, y \in K,\ y \neq 0 \Longrightarrow x - y \in K,\ xy^{-1} \in K$

19. F, karakteristiği p olan bir cisim ise, $P = \{x \in F : x^p = x\}$ kümesinin F nin bir altcismi olduğunu kanıtlayınız.

20. Karakteristiği 4 olan bir halka ve o halkanın öyle x ve y elemanlarını bulunuz ki, $(x + y)^4 \neq x^4 + y^4$ olsun.

21. F, karakteristiği 2 ve eleman sayısı 2 den fazla olan bir cisim ise, F içinde $(x+y)^3 \neq x^3 + y^3$ olacak biçimde x ve y elemanları bulunduğunu kanıtlayınız.