

Çoklueşdoğrusallık

Çoklueşdoğrusallığın Niteliği



Ekonometri 2 – Konu 5
Sürüm 2,0 (Ekim 2011)




UADMK Açık Lisans Bilgisi

İşbu belge, “Creative Commons Attribution-Non-Commercial ShareAlike 3.0 Unported” (CC BY-NC-SA 3.0) lisansı altında bir açık ders malzemesi olarak genel kullanıma sunulmuştur. Eserin ilk sahibinin belirtilmesi ve geçerli lisansın korunması koşulu ile özgürce kullanılabilir, çoğaltılabilir ve değiştirilebilir. Creative Commons örgütü ve “CC-BY-NC-SA” lisansı ile ilgili ayrıntılı bilgi “<http://creativecommons.org>” adresinde bulunmaktadır. Bu ekonometri ders notları setinin tamamına “<http://www.acikders.org.tr>” adresinden ulaşılabilir.

A. Talha Yalta

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Ekim 2011 

Ders Planı

- 1 Çoklueşdoğrusallığın Niteliği
 - Çoklueşdoğrusallık Kavramı
 - Çoklueşdoğrusallık Varken Tahmin

Çokluğdoğrusallık Kavramı

Klasik doğrusal bağlanım modelinin (KDBM) varsayımlarından biri, modele katılan değişkenler arasında “**çokluğdoğrusallık**” (multicollinearity) olmadığı yönündedir.

Gözlem sayısının açıklayıcı değişken sayısından çok olduğu ve açıklayıcıların yeterince değişkenlik gösterdiği varsayımları da çokluğdoğrusallığın olmadığı varsayımının tamamlayıcılarıdır.

Bu bölümde Şu sorulara yanıt arayacağız:

- 1 Çokluğdoğrusallığın niteliği nedir?
- 2 Çokluğdoğrusallık gerçekten bir sorun mudur?
- 3 Uygulamada doğurduğu sonuçlar nelerdir?
- 4 Varlığı nasıl anlaşılabilir?
- 5 Düzeltmek için ne gibi önlemler alınabilir?

Çokluğdoğrusallık Kavramı

- Eğdoğrusallık kavramını ilk kez 1934 yılında Ragnar Frisch öne sürmüştür.
- Önceleri bu terim bir bağlantım modelinin tüm ya da bazı açıklayıcı değişkenleri arasında “kusursuz” (perfect) ya da “tam” (exact) bir doğrusal ilişki olduğu anlamına geliyordu.
- Aşağıdaki örneği ele alalım:

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_k X_k = 0$$

- Yukarıdaki eşitlikte yer alan herhangi bir X , örnek olarak X_2 , diğerlerinin doğrusal işlevi olarak gösterilebilir:

$$X_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} X_1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2} X_3 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_2} X_k$$

- Diğer bir deyişle bu örnekteki herhangi bir X değişkenini diğerlerinin doğrusal bir bileşiminden türetmek olasıdır.

Çokluşdoğrusallık Kavramı

- Bugün çokluşdoğrusallık hem tam çokluşdoğrusallığı hem de X değişkenlerinin genel olarak birbirleriyle ilişkili olduklarını gösteren daha geniş bir anlam içermektedir:

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_k X_k + v_i = 0$$

- v_i burada olasılıksal hata terimidir.
- Örnek olarak X_2 şu şekilde yazılabilir:

$$X_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} X_1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2} X_3 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_2} X_k - \frac{1}{\lambda_2} v_i$$

- Buna göre X_2 , diğer X değişkenlerinin kusursuz olmayan bir doğrusal bileşimidir.

Çoklueşdoğrusallık Kavramı

- Tanımladığımız şekliyle çoklueşdoğrusallık, yalnızca X 'ler arasındaki doğrusal ilişkileri anlatmaktadır.
- Örnek olarak aşağıdaki “**çokterimli**” (polynomial) bağlanım modelini ele alalım:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \beta_3 X_i^3 + u_i$$

- Burada X_i , X_i^2 ve X_i^3 'ün işlevsel ilişki içinde olduğu açıktır.
- Ancak bu ilişki doğrusal olmadığı için çoklueşdoğrusallığın olmadığı varsayımını çığnemez.
- Uygulamada ise X_i , X_i^2 , ve X_i^3 arasında hesaplanan ilinti katsayısı yüksek çıkacak ve bu da anakütle katsayılarının tahmin edilmesini güçleştirecektir.

Çokluğdoğrusallık Kavramı

- Tam ve tamdan az eğdoğrusallık arasındaki farkı daha iyi görebilmek için, ağağıdaki varsayımsal verileri inceleyelim:

X_1	X_2	X_2^*
10	50	52
15	75	75
18	90	97
24	120	129
30	150	152

- Bu örnekte $X_2 = 5X_1$ olduğu için, X_1 ile X_2 arasında tam eğdoğrusallık bulunmaktadır.
- Diğer bir deyiğle ilinti katsayısı $r_{12} = 1$ 'dir.
- X_2^* değişkeni ise X_2 'ye rastsal sayılar çizelgesinden alınan $\{2, 0, 7, 9, 2\}$ sayılarının eklenmesiyle bulunmuştur.
- X_1 ile X_2^* arasında bir tam eğdoğrusallık olmamakla birlikte çok güçlü bir ilinti ($r_{12}^* = 0,9959$) bulunmaktadır.

Çoklueşdoğrusallığın Nedenleri

Çoklueşdoğrusallık şu etmenlere bağlı olabilir:

- 1 **Veri derleme yöntemi:** Örnek olarak, bir X 'in anakütlede aldığı değerlerin sınırlı bir aralığında örneklem almak.
- 2 **Anakütle kısıtlamaları:** Örnek olarak, elektrik tüketiminin gelir ve konut büyüklüğüne göre bağlanımında görülen yüksek gelirli ailelerin büyük evlerde oturmaları durumu.
- 3 **Model kurma hatası:** Örnek olarak, bir X değişkeninin gözlenen aralığı darken bağlanım modeline X^2 gibi terimler eklemek.
- 4 **Aşırı belirtimli model:** Modelin gözlem sayısına göre çok fazla sayıda değişken içermesi.

Tam Eşdoğrusallık

- Tam çoklu eşdoğrusallık durumunda bağlanım katsayıları belirsizdir.
- Ayrıca $\hat{\beta}$ katsayılarının ölçünlü hataları da sonsuz olur.
- Bunu görebilmek için üç değişkenli modeli sapmalar biçiminde yazalım:

$$y_i = \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3 x_{3i} + u_i$$

- Tahmin edilen β değıştirgeleri aşğıdaki gibidir:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(\sum y_i x_{2i})(\sum x_{3i}^2) - (\sum y_i x_{3i})(\sum x_{2i} x_{3i})}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i} x_{3i})^2}$$

$$\hat{\beta}_3 = \frac{(\sum y_i x_{3i})(\sum x_{2i}^2) - (\sum y_i x_{2i})(\sum x_{2i} x_{3i})}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i} x_{3i})^2}$$

(... devam)

Tam Eşdoğrusallık

- Şimdi, $X_{3i} = \lambda X_{2i}$ diyelim ve $\lambda \neq 0$ olsun.
- Bu durumda tahmin edilen değiştirgeler şuna indirgenir:

$$\hat{\beta}_2 = \hat{\beta}_3 = \hat{\beta} = \frac{(\sum y_i x_{2i})(\lambda^2 \sum x_{2i}^2) - (\lambda \sum y_i x_{2i})(\lambda \sum x_{2i}^2)}{(\sum x_{2i}^2)(\lambda^2 \sum x_{2i}^2) - \lambda^2 (\sum x_{2i}^2)^2} = 0$$

- Yukarıdaki gösterimin belirsiz olmasının nedeni, X_{2i} ile X_{3i} 'nin tam eşdoğrusallıktan dolayı birbirlerinden ayrılamamasıdır.
- X_{2i} değişince X_{3i} de λ çarpanıyla değişir, sabit tutulamaz.
- Uygulamada bu durum yıkıcı olur çünkü bütün amaç zaten X_{2i} ve X_{3i} 'nin Y_i üzerindeki kısmi etkilerini ayırtmaktır.

Tam Eşdoğrusallık

- Tam çoklu eşdoğrusallığın yol açtığı belirsizlik sorununu görmek için $X_{3i} = \lambda X_{2i}$ özdeşliğini modele yerleştirelim:

$$\begin{aligned} y_i &= \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3 (\lambda x_{2i}) + u_i \\ &= (\hat{\beta}_2 + \lambda \hat{\beta}_3) x_{2i} + u_i \\ &= \hat{\alpha} x_{2i} + u_i \end{aligned}$$

- Demek ki α değeri için tek bir tahmin yapılabilirken, β_2 ile β_3 için ayrı ayrı iki tahmin yapılamaz:

$$\hat{\alpha} = (\hat{\beta}_2 + \lambda \hat{\beta}_3) \quad \hat{\beta}_2 = \hat{\alpha} - \lambda \hat{\beta}_3$$

Yüksek Eşdoğrusallık

- Tam çokluşdoğrusallık uç bir durumdur. İktisadi verilerde genellikle tam doğrusal ilişkiye rastlanmaz.
- Yüksek çokluşdoğrusallık durumu için şu ilişkiye bakalım:

$$x_{3i} = \lambda x_{2i} + v_i$$

- Burada $\lambda \neq 0$ 'dır. v_i ise x_{2i} 'den bağımsız ($\sum x_{2i} v_i = 0$) bir olasılıksal hata terimidir.
- Yukarıda gösterilen yüksek çokluşdoğrusallık durumunda, β_2 ve β_3 katsayılarının tahmin edilmesi olanaklıdır:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(\sum y_i x_{2i})(\lambda^2 \sum x_{2i}^2 + \sum v_i^2) - (\lambda \sum y_i x_{2i} + \sum y_i v_i)(\lambda \sum x_{2i}^2)}{(\sum x_{2i}^2)(\lambda^2 \sum x_{2i}^2 + \sum v_i^2) - (\lambda \sum x_{2i}^2)^2}$$

- Yukarıdakine benzer bir gösterim β_3 için de çıkarılabilir.
- Demek ki yüksek çokluşdoğrusallık durumunda tahmin yapılmasını engelleyen bir durum yoktur.

Önümüzdeki Dersin Konusu

Önümüzdeki ders

Çoklueşdoğrusallığın sonuçları