Doğrusal Bağlanım Modeline Dizey Yaklaşımı

Dizey Yaklaşımı ile Çıkarsama Sorunu

TÜRKİYE BİLİMLER AKADEMİSİ

ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Ekonometri 2 – Konu 4

Sürüm 2,0 (Ekim 2011)

UADMK Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011 BY-NC-SA

ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Ders Planı

1. Dizey Yaklaşımı ile Çıkarsama Sorunu
   - Bireysel Katsayıların Önsav Sınamaları
   - Varyans Çözümlemesi ve F Sınamaları
   - Dizey Gösterimi ile Kestirim

Bireysel Katsayıların Önsav Sınamaları

- Tahmin sonrasında çıkarsama yapabilmek için, u_i hatalarının sıfır ortalama ve sabit varyans σ^2 ile normal dağıldıklarını varsayıyoruz:

$$\mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$$

- $\mathbf{u}$ burada $n \times 1$ boyutlu sütun yöneyi, $\mathbf{0}$ ise boş yöneydir.
- Buna göre, SEK tahmincileri $\hat{\beta}_i$'lar da aşağıda gösterilen şekilde normal dağılırlar:

$$\hat{\mathbf{B}} \sim N[\mathbf{B}, \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}]$$

- Demek ki $\hat{\mathbf{B}}$'nın her öğesi, gerçek $\mathbf{B}$ öğesiyle eşit ortalama ile ve $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ ters dizeyinin asal köşegenindeki uygun öğe çarpı σ^2'ye eşit varyans ile normal dağılmaktadır.
- $\sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$'in varyans-kovaryans dizeyi olduğuna dikkat ediniz.

Bireysel Katsayıların Önsav Sınamaları

- Uygulamada σ^2 bilinmediği için t dağılımına geçilir ve $\hat{\sigma}^2$ tahmincisi kullanılır.
- Bu durumda $\hat{\mathbf{B}}$'nın her öğesi $n - k$ sd ile t dağılımına uyar:

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\text{öh}(\hat{\beta}_i)}$$

- $\hat{\beta}_i$ burada $\hat{\mathbf{B}}$'nın bir öğesidir.
- Demek ki t dağılımını kullanarak herhangi bir $\hat{\beta}_i$'nın güven aralığını bulmak ve çeşitli sınamaları yapmak olanaklıdır.

Varyans Çözümlemesinin Dizey Gösterimi

- Tüm bağlanım katsayılarının eşanlı olarak sıfıra eşit olduğu önsavını sınamak ya da bir değişkenin ek katkısını ölçmek için VARÇÖZ yönteminin kullanıldığını anımsayalım.
- TKT, BKT ve KKT'nin dizey gösterimleri kullanılarak aşağıdaki gibi bir VARÇÖZ çizelgesi düzenlenebilir:

Değişimin Kaynağı	KT	sd	OKT
Bağlanımdan (BKT)	$\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2$	$k-1$	$\frac{\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2}{k-1}$
Kalıntılardan (KKT)	$\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}$	$n-k$	$\frac{\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}}{n-k}$
Toplam (TKT)	$\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2$	$n-1$	

- Buna göre:

$$F = \frac{(\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2)/(k-1)}{(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y})/(n-k)}$$

Varyans Çözümlemesinin Dizey Gösterimi

- F ve R^2 değerlerinin yakın ilişkili olduğunu biliyoruz.
- Buna göre VARÇÖZ çizelgesinin R^2 gösterimi de şöyledir:

Değişimin Kaynağı	KT	sd	OKT
Bağlanımdan (BKT)	$R^2(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2)$	$k-1$	$\frac{R^2(\mathbf{Y}'\mathbf{Y}-n\bar{Y}^2)}{k-1}$
Kalıntılardan (KKT)	$(1-R^2)(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2)$	$n-k$	$\frac{(1-R^2)(\mathbf{Y}'\mathbf{Y}-n\bar{Y}^2)}{n-k}$
Toplam (TKT)	$\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2$	$n-1$	

- Demek ki:

$$F = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)}$$

- Bu gösterimin üstünlüğü, tüm hesaplamaların yalnız R^2 ile yapılabilmesi ve sadeleştirme sonrası ortadan kalkacak olan $(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2)$ terimiyle ilgilenmeye gerek kalmamasıdır.

F Sınamasının Dizey Gösterimi

- Genel olarak, F sınamasının amacı bir ya da birden fazla anakütle katsayısı üzerine konulan doğrusal sınırlamaları sınamaktır.
- Bu sınamanın dizey karşılığını türetebilmek için aşağıdaki tanımlardan yararlanalım:

$\hat{\mathbf{u}}_S$	: Sınırlamalı SEK bağlanımının kalıntı yöneyi
$\hat{\mathbf{u}}_{SM}$	: Sınırlamasız SEK bağlanımının kalıntı yöneyi
$\hat{\mathbf{u}}_S'\hat{\mathbf{u}}_S = \sum \hat{u}_S^2$	: Sınırlamalı bağlanıma ait KKT
$\hat{\mathbf{u}}_{SM}'\hat{\mathbf{u}}_{SM} = \sum \hat{u}_{SM}^2$	: Sınırlamasız bağlanıma ait KKT
m	: Doğrusal sınırlama sayısı
k	: Sabit terim dahil anakütle katsayılarının sayısı
n	: Gözlem sayısı

F Sınamasının Dizey Gösterimi

- Genel F sınamasının dizey gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$F = \frac{(\hat{\mathbf{u}}'_S \hat{\mathbf{u}}_S - \hat{\mathbf{u}}'_{SM} \hat{\mathbf{u}}_{SM})/m}{(\hat{\mathbf{u}}'_{SM} \hat{\mathbf{u}}_{SM})/(n-k)}$$

- Yukarıda gösterilen istatistik, m ve $(n-k)$ serbestlik derecesi ile F dağılımına uyar.
- Hesaplanan F değeri eğer kritik F değerinden büyükse, sınırlamalı bağlanım sıfır önsavı reddedilir.

Dizey Gösterimi ile Kestirim

- Tahmin edilen bir bağlanım işlevi, belli bir X_0 değerine karşılık gelen Y'yi kestirmek için kullanılabilir.
- İki türlü kestirim vardır: "Ortalama kestirimi" (mean prediction) ve "bireysel kestirim" (individual prediction).
- Ortalama kestirimi, seçili X_0 değerlerine bağlanım doğrusu üzerinde yakıştırılan noktanın tahmin edilmesi demektir.
- Bireysel kestirim ise X_0'ın karşılığı olan Y değerinin kendisidir.
- Bu iki kestirim biçimi de $\hat{Y}$ için aynı nokta tahmini verir.
- Diğer yandan bireysel kestirimin varyansı, ölçünlü hatası ve bunlara bağlı olarak da güven aralığı ortalama kestirime göre daha yüksektir.

Ortalama Kestiriminin Dizey Gösterimi

- Ortalama kestirimini dizey cebiri ile göstermek için, tahmin edilen çoklu bağlanımın sayıl gösterimini anımsayalım:
$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{ki}$$
- Yukarıdaki eşitliğin dizey gösterimi kısaca şöyledir:
$$\hat{Y}_i = \mathbf{x'}_i \hat{\mathbf{B}}$$
- $\mathbf{x'}_i = [1, X_{2i}, X_{3i}, \ldots, X_{ki}]$ burada bir satır yöneyidir.
- $\hat{\mathbf{B}}$ ise tahmin edilen β'ları gösteren bir sütun yöneyidir.
- Buna göre, verili bir $\mathbf{x'}_0 = [1, X_{20}, X_{30}, \ldots, X_{k0}]$ yöneyine karşılık gelen $\hat{Y}_0$ ortalama kestirimi aşağıdaki biçimi alır:

$$(\hat{Y}_0 | \mathbf{x'}_0) = \mathbf{x'}_0 \hat{\mathbf{B}}$$

- Burada $\mathbf{x}_0$'lar verili değerlerdir.
- Ortalama kestirimi ayrıca yansızdır: $E(\mathbf{x'}_0 \hat{\mathbf{B}}) = \mathbf{x'}_0 \hat{\mathbf{B}}$.

Ortalama Kestiriminin Varyansı

- Ortalama kestiriminin varyansı ise şöyledir:

$$\text{var}(\hat{Y}_0|\mathbf{x}'_0) = \sigma^2\mathbf{x}'_0(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}'_0$$

- $\mathbf{x}'_0$ burada kestirim yapmada kullanılan X değişkenlerinin verili değerlerini içeren satır yöneyidir.
- $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ ise çoklu bağlanım tahmininde kullanılan dizeydir.
- Uygulamada, hata teriminin sabit varyansı σ^2 yerine yansız tahmincisi $\hat{\sigma}^2$ koyularak formül şu şekilde yazılır:

$$\text{var}(\hat{Y}_0|\mathbf{x}'_0) = \hat{\sigma}^2\mathbf{x}'_0(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}'_0$$

- Yukarıdaki eşitlik kullanılarak, $\mathbf{x}'_0$ verili̇yken $\hat{Y}_0$ ortalama kestiriminin $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı bulunabilir.

Bireysel Kestirimin Dizey Gösterimi

- Y'nin bireysel kestirimi $(Y_0|\mathbf{x'}_0)$, ortalama kestirimi $(\hat{Y}_0|\mathbf{x'}_0)$ ile aynıdır:

$$(Y_0|\mathbf{x'}_0) = \mathbf{x'}_0\hat{\mathbf{B}}$$

- Diğer yandan, bireysel kestirimin varyansı ortalama kestiriminin varyansından daha büyüktür:

$$\mathrm{var}(Y_0|\mathbf{x'}_0) = \hat{\sigma}^2[1 + \mathbf{x'}_0(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{x'}_0]$$

- $\mathrm{var}(Y_0|\mathbf{x'}_0)$ burada $E[Y_0 - \hat{Y}_0|X]^2$ demektir.
- Uygulamada, ortalama kestiriminde olduğu gibi, σ^2 yerine yansız tahmincisi $\hat{\sigma}^2$ kullanılır.

Önümüzdeki Dersin Konusu

Önümüzdeki ders

Çoklueşdoğrusallığın niteliği