$\mathcal{CEVAPLAR}$

ALIŞTIRMALAR 13

1. (v) $s = 1$ için $xy_1 = xy_1$ olup iddia doğru. $s < n$ için iddianın doğru olduğunu kabul edersek, $s = n$ için iddianın doğru olduğu şöyle görülür:

$$\begin{aligned} x(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + y_n) &= x((y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) + y_n) \\ &= x(y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})+xy_n = xy_1+xy_2+\cdots+xy_{n-1}+xy_n. \end{aligned}$$

3. Tümevarım.

5. $H = \mathbb{R}^{n\times n}$ halkasının $x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ elemanları için $xy = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $yx = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

7. Teorem 3 kullanılarak kolayca gösterilebilir.

9. H, $\mathbb{Z}_n$ nin hebir toplamsal altgrubu olsun. Devirli olduğunu bildiğimiz H nin bir üreteci a, $H =< a >$ ise,

$$x,\ y \in H \Longrightarrow x = ma,\ \ y = na;\ m, n \in \mathbb{Z}.$$

Dolayısıyla, $xy = (ma)(na) = (mn)a \in H$. $0 \in H$ ile birlikte bu, H nin althalka olduğunu gösterir. Bu sonuç herhangi bir halka için doğru değildir. $\mathbb{Z}[x]$ polinomlar halkasının

$$H = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f = 0 \text{ veya } der\ f \leq 2\}$$

altgrubu althalka değildir.

11. H halkasının S yi kapsayan tüm althalkalarının topluluğu $\mathcal{B}$ ise, S nin ürettiği althalka: $< S >= \bigcap_{A \in \mathcal{B}} A$

a. $2\mathbb{Z}$ **b.** $5\mathbb{Z}$ **c.** $\{\frac{a}{2^k} : a, k \in \mathbb{Z}\}$ **d.** $\{\frac{2a}{3^r} : a, r \in \mathbb{Z}\}$

13. $\mathbb{Z}[i]^* = \{-1, 1, i, -i\}$.

15. $0 = 0 \cdot 1 \in A$. $n1,\ r1 \in A$ ise, $n1 - r1 = (n-r)1,\ (n1)r1 = (nr)1 \in A$.