ALIŞTIRMALAR 13

1. Teorem 1 in kanıtında işaret edilen tümevarımları gerçekleştiriniz.

2. Aşağıdaki kümelerden her birinin, reel sayılarda toplama ve çarpma işlemleri ile, değişmeli ve birimli halka olduğunu gösteriniz; her iki halkanın da sonsuz çoklukta tersinir elemanı bulunduğunu gösteriniz.

a. $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2} : m, n \in \mathbb{Z}\}$

b. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$

3. H bir halka; $x,\ y \in H$; $m,\ n \in \mathbb{N}$ ve $xy = yx$ ise, $x^m y^n = y^n x^m$ olduğunu kanıtlayınız.

4. $a, b, x, y, z \in \mathbb{Z}$ ise, aşağıdaki önermelerin dördü de doğrudur.

a. $ab = 0 \Longrightarrow a = 0$ veya $b = 0$

b. $x^2 = x \Longrightarrow x = 0$ veya $x = 1$

c. $xy = xz \Longrightarrow x = 0$ veya $y = z$

d. $y^2 = 1 \Longrightarrow y = -1$ veya $y = 1$

Öyle bir $n \in \mathbb{N}$ ve $a, b, x, y, z \in \mathbb{Z}_n$ bulunuz ki yukarıdaki dört önerme, $\mathbb{Z}_n$ içinde yanlış olsun. Bulduğunuz n asal mı?

5. Öyle bir H halkası ve $x,\ y \in H$ bulunuz ki, $xy = 0$, fakat $yx \neq 0$ olsun.

6. H bir halka, her $x \in H$ için $x^2 = x$ ise, her $x \in H$ için $-x = x$ olduğunu ve H nin değişmeli halka olduğunu kanıtlayınız.

7. H bir halka, $x \in H$ ise, aşağıdaki kümelerden her birinin H nin bir althalkası olduğunu gösteriniz:

a. $A = \{a \in H : ax = 0\}$

b. $M(x) = \{a \in H : ax = xa\}$

c. $A = \{ax + nx : a \in H, n \in \mathbb{Z}\}$

d. $A = \{xa + nx : a \in H, n \in \mathbb{Z}\}$

8. Aşağıda verilen her H ve A için, A , H nin bir alt halkası mıdır, değil midir? Belirleyiniz.

a. $H = \mathbb{Z}$, $A = 2\mathbb{Z}$ **b**. $H = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\}$

c. $H = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z}_3$ **d**. $H = \mathcal{S}[0,1]$, $A = \{f \in H : f(0) = \frac{1}{2}\}$

9. Her $n > 1$ için $\mathbb{Z}_n$ nin her toplamsal altgrubunun bir althalka olduğunu gözlemleyiniz ve nedenini açıklayınız. Bu sonuç herhangi bir halka için doğru mudur? Örnekler veriniz.

10. H bir halka ve $\mathcal{A}$, H nin althalkalarından oluşan bir topluluk ise, $\mathcal{A}$ daki althalkaların kesişimi, $\bigcap\limits_{A\in\mathcal{A}} A$ nın da H nin bir althalkası olduğunu kanıtlayınız.

11. Alıştırma 10 u ve gruplar için benzer kavramın nasıl tanımlandığını kullanarak bir H halkasının herhangi bir S altkümesi tarafından üretilen althalkasını tanımlayınız. Bu bağlamda,

a. $\mathbb{Z}$ halkasının 2 yi kapsayan en küçük althalkasını,

b. $\mathbb{Z}$ nin $\{10, 15\}$ i kapsayan en küçük althalkasını,

c. $\mathbb{Q}$ nun $\frac{1}{2}$ yi kapsayan en küçük althalkasını,

d. $\mathbb{Q}$ nun $\frac{2}{3}$ ü kapsayan en küçük althalkasını

belirleyiniz.

12. $H_1, \ldots, H_n$ halkalar ise, bunların toplamsal gruplarının dış dolaysız toplamı $H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n$ üzerinde çarpma işlemini de bileşenlere göre

$$(x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_n) = (x_1y_1, \ldots, x_ny_n)$$

olarak tanımlayalım. Aşağıdakileri kanıtlayınız:

a. $H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$ bir halkadır.

b. Her bir H_k, $1 \le k \le n$, birimli ve H_k nın birim elemanı e_k ise, $1 = (e_1, \ldots, e_k)$, $H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$ nin birim elemanıdır. Ayrıca, bu durumda $(H_1 \oplus \cdots \oplus H_n)^* = H_1^* \oplus \cdots \oplus H_n^*$ dır.

c. Her bir H_k, $1 \le k \le n$, değişmeli halka ise, $H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$

değişmeli halkadır.

13. $\mathbb{Z}[i] = \{m + ni : m, n \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{C}$ nin bir althalkasıdır. $\mathbb{Z}[i]$ nin tüm tersinir elemanlarını bulunuz. (*İpucu*: $(m + ni)$ tersinir $\Leftrightarrow |m + ni|^2 = m^2 + n^2 = 1$ olduğuna dikkat ediniz.)

14. H bir birimli halka, $a \in H$ ve $a^2 = 1$ ise, $A = \{\ axa \ : \ x \in H\ \}$ kümesi H nin bir althalkasıdır, gösteriniz.

15. H birimli halka ise, $A = \{\ n1 : \ n \in \mathbb{Z}\ \}$, H nin bir althalkasıdır, gösteriniz.

16. H birimli halka ve A da onun bir althalkası olsun.

a. A nın da birimli olması gerekir mi? Neden ?

b. A birimli ise, A nın birim elemanı, H nin birim elemanı ile aynı olmak zorunda mıdır? Neden?