

## ALİŞTIRMALAR 12

1.  $\sigma : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\sigma(a, b) = a - b$  nin bir homomorfizm tanımladığını gösteriniz;  $\ker(\sigma)$  yı belirleyiniz.
2.  $\sigma : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $\sigma(x) = x^4$  olsun.  $\sigma$  nın bir homomorfizm olduğunu gösteriniz ve  $\ker(\sigma)$  yı belirleyiniz.
3.  $\mathbb{Z}[x]$ , katsayıları tamsayılar olan polinomlardan oluşan toplamsal grup olsun.  $\sigma : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\sigma(f) = f(1)$ , ile tanımlanan fonksiyonun bir grup homomorfizmi olduğunu gösteriniz,  $\ker(\sigma)$  yı belirleyiniz.
4. Her  $n > 1$  için  $\mathcal{S}_n$  den  $\mathbb{Z}_2$  ye

$$\sigma(\alpha) = \begin{cases} 1 & , \alpha \text{ tek} \\ 0 & , \alpha \text{ çift} \end{cases}$$

ile tanımlanan  $\sigma$  fonksiyonunun bir homomorfizm olduğunu kanıtlayınız.

5. Aşağıdaki fonksiyonlardan her birinin bir grup homomorfizmi olup olmadığını belirleyiniz:

- |   |   |
|---|---|
| a. $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , $\sigma(x) = 2^x$   | b. $\sigma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , $\sigma(x) = 2^{ x }$     |
| c. $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , $\sigma(x) = 2 x $  | d. $\sigma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , $\sigma(x) = 2x$          |
| e. $\sigma : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ , $\sigma(x) = x^2$ | f. $\sigma : \mathbb{Z}_5^* \rightarrow \mathbb{Z}_5^*$ , $\sigma(x) = x^2$ |

6.  $G$  herhangi bir grup ve  $\sigma : \mathbb{Z}_{13} \rightarrow G$ , bire-bir olmayan bir homomorfizm olduğuna göre,  $\sigma$  yı belirleyiniz.

7.  $\sigma : \mathbb{Z}_{30} \rightarrow \mathbb{Z}_{30}$  bir grup homomorfizmi,  $\ker(\sigma) = \{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$  ve  $\sigma(13) = 6$  olduğuna göre,  $\sigma^{-1}(6)$  yı belirleyiniz.

8.  $\sigma : G \rightarrow G'$  bir örten homomorfizm olsun. Eğer  $G$  sonlu ise ve  $G'$  nün, mertebesi  $n$  olan bir elemanı varsa,  $G$  nin de mertebesi  $n$  olan bir elemanı bulunduğunu kanıtlayınız.

9.  $f : G \rightarrow G'$  bir grup homomorfizmi;  $x \in G$  ise,  $f(\langle x \rangle) = \langle f(x) \rangle$

olduğunu gösteriniz.

**10.**  $\mathbb{Z}_{12}$  den  $\mathbb{Z}_{30}$  a tanımlı kaç grup homomorfizmi vardır? Bu homomorfizmleri belirleyiniz.

**11.**  $\mathbb{Z}_{30}$  dan  $\mathbb{Z}_{12}$  ye kaç tane homomorfizm vardır? Bunlardan kaç tanesi örtendir?

**12.**  $\mathbb{Z}_{30}$  dan  $\mathbb{Z}_{10}$  a kaç tane homomorfizm vardır? Bunlardan kaç tanesi örtendir?

**13.**  $k, n \in \mathbb{N}$  için  $k$  ve  $n$  nin tüm ortak bölenlerinin kümesi  $\mathbf{B}$  ve her  $d \in \mathbb{N}$  için  $\varphi(d) = |\mathbb{Z}_d^*|$ , Euler  $\varphi$ -fonksiyonu, olsun.  $\mathbb{Z}_n$  den  $\mathbb{Z}_k$  ya tam  $\sum_{d \in \mathbf{B}} \varphi(d)$  tane homomorfizm bulunduğunu kanıtlayınız.

**14.**  $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$  den  $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$  e hiç örten homomorfizm bulunmadığını gösteriniz.

**15.**  $\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_2$  den  $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$  e hiç örten homomorfizm bulunmadığını gösteriniz.

**16.**  $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$  ten  $\mathbb{Z}_8$  e örten homomorfizm var mıdır?  $\mathbb{Z}_{16}$  dan  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  ye örten homomorfizm var mıdır?

**17.**  $G$  bir sonlu grup olmak üzere,  $\sigma : G \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$  bir örten grup homomorfizmi olsun. Eğer  $\ker(\sigma)$  nin mertebesi 5 ise,  $G$  nin, mertebesi 5, 10, 15, 20, 30, ve 60 olan normal altgrupları bulunduğunu kanıtlayınız.

**18.**  $G$  bir sonlu grup olmak üzere,  $\sigma : G \rightarrow \mathbb{Z}_{10}$  bir örten grup homomorfizmi ise,  $G$  nin, indeksi 2 ve 5 olan normal altgrupları bulunduğunu kanıtlayınız.

**19.**  $G$  bir sonlu grup;  $H \trianglelefteq G$ ,  $K \trianglelefteq G$  olsun. Bu takdirde,  $(K : H \cap K)$  nin  $(G : H)$  yi böldüğünü gösteriniz.

**20.**  $\mathbb{Z}_{24}$  ün  $H = \langle 3 \rangle$  ve  $N = \langle 4 \rangle$  altgruplarını alalım.

a)  $H + N$  ve  $H \cap N$  nin elemanlarını listeleyiniz.

b)  $H/H \cap N$  ve  $(H + N)/N$  nin tüm eşkümelerini belirleyiniz.

c)  $(H + N)/N$  ile  $H/H \cap N$  için Teorem 3 ün kanıtında verilen izomorfizmi, birbirine karşılık gelen elemanları belirterek, kurunuz.

**21.**  $G = \mathbb{Z}_{24}$  ün  $H = \langle 3 \rangle$  ve  $K = \langle 12 \rangle$  altgruplarını alalım.

a)  $G/H$  nin tüm eşkümelerini belirleyiniz.

b)  $G/K$ ,  $H/K$  ve  $(G/K)/(H/K)$  nın tüm eşkümelerini belirleyiniz.

c)  $G/H$  ve  $(G/K)/(H/K)$  için Teorem 4 ün kanıtında verilen izomorfizmi, birbirine karşılık gelen elemanları belirterek, kurunuz.