BÖLÜM 12

GRUP HOMOMORFİZMLERİ

Bu bölümü bitirdiğinizde,

- grup homomorfizmleri ve bazı özellikleri
- çekirdek, görüntü kavramları
- doğal homomorfizm
- izomorfizm teoremleri

hakkında bilgi sahibi olabileceksiniz.

BÖLÜM 12

GRUP HOMOMORFİZMLERİ

Bu bölümde, gruplar için izomorfizm kavramının genelleştirilmesi olarak kabul edilebilecek *homomorfizm* kavramını ele alıyoruz. Bu kavramın, izomorfizm kavramı ile ilişkisine ek olarak, bölüm grupları ile de ne kadar ilişkili olduğu bu bölümde görülecektir.

Tanım 1. G ve G' iki grup olmak üzere bir $\sigma : G \longrightarrow G'$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer her $x, y \in G$ için $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ ise, σ ya G den G' ye bir *grup homomorfizmi* (ya da kısaca bir *homomorfizm*) denir. □

Uyarı 1. Yukarıda verilen tanımda, izomorfizm tanımında olduğu gibi, G ve G' gruplarının her ikisinin de çarpımsal gruplar olduğu varsayılmıştır. Tanımdaki koşulun-ki bu koşula daha önce olduğu gibi *işlem koruma* koşulu diyebiliriz- söz konusu grupların ikili işlemlerine göre uyarlanabileceği açıktır. □

Her izomorfizmin bir homomorfizm olduğuna; daha kesin bir ifadeyle, izomorfizm denince bire-bir ve örten bir grup homomorfizmi anlaşılması gerektiğine dikkat ediniz.

Analiz derslerinde karşılaştığımız fonksiyonlardan bazıları grup homomorfizmleridir.

Örnek 1. $\sigma : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $\sigma(x) = |x|$ ile tanımlanan mutlak değer fonksiyonu bir grup homomorfizmidir. Çünkü, mutlak değer fonksiyonunun temel özelliklerinden biri, her $x, y \in \mathbb{R}$ için $|xy| = |x|\ |y|$ olmasıdır ki bu, σ nın işlem koruyan bir fonksiyon olduğunu ifade eder. Bu homomorfizmin örten olduğuna dikkat ediniz. □

Yeni örnekler vermeden önce grup homomorfizmleri ile ilgili çok önemli iki kavram tanımlayacağız:

Tanım 2. $\sigma : G \longrightarrow G'$ bir grup homomorfizmi ise, $e' \in G'$ birim eleman olmak üzere, *çek* $(\sigma) = \{x \in G : \ \sigma(x) = e'\}$ kümesine σ nın *çekirdeği*; *gör* $(\sigma) = \{\sigma(x) : \ x \in G\}$ kümesine de σ nın *görüntüsü* denir. □

Örnek 2. $\sigma : GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $\sigma(A) = det\ (A)$ ile tanımlanan determinant fonksiyonunun işlem koruduğu; yani her $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$ için $det(AB) = (det\ (A))(det\ (B))$ olduğu bilindiğinden, determinant fonksiyonu bir grup homomorfizmidir. Determinant homomorfizmi için *çek* $(\sigma) = SL(n, \mathbb{R})$, *gör* $(\sigma) = \mathbb{R}^*$ dır. Örnek 1 deki σ homomorfizmi için *çek* $(\sigma) = \{-1, 1\}$; *gör* $(\sigma) = \mathbb{R}^+$ dır. □

Örnek 3. Her $n \geq 1$ ve $x \in \mathbb{Z}$ için x in n ile bölünmesiyle elde edilen kalan $k \in \mathbb{Z}_n$ olmak üzere, $\sigma_n : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$, $\sigma_n(x) = k$ fonksiyonu bir grup homomorfizmidir; çünkü, her $x, y \in \mathbb{Z}$ için $\sigma_n(x + y) = \sigma_n(x) + \sigma_n(y)$ dir. Bu homomorfizm için *çek* $(\sigma_n) = n\mathbb{Z}$, *gör* $(\sigma_n) = \mathbb{Z}_n$ dir. σ_n ye $\mathbb{Z}$ üzerinde $(mod\ \ n)$ *indirgeme homomorfizmi* denir. □

Önerme 1. *$\sigma : G \longrightarrow G'$ ve $\gamma : G' \longrightarrow G''$ grup homomorfizmleri ise, $\gamma \circ \sigma : G \longrightarrow G''$ de grup homomorfizmidir.*

Kanıt. $\gamma \circ \sigma$ nın işlem koruduğunu göstermek yeter. $x, y \in G$ için

$$\begin{aligned} \gamma \circ \sigma(xy) &= \gamma(\sigma(xy)) = \gamma(\sigma(x)\sigma(y)) \\ &= (\gamma(\sigma(x))(\gamma(\sigma(y)) = (\gamma \circ \sigma(x))(\gamma \circ \sigma(y)). \end{aligned}$$ ■

Dolaysız toplamlar da bazı homomorfizmlerin ortaya çıkmasına yol açar.

Tanım 3. $G_1, \ldots, G_n$ gruplar ve $G = G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$ olsun. Her $j = 1, \ldots, n$ için $\pi_j : G \longrightarrow G_j$, $\pi_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j$ ile tanımlanan fonksiyona, G nin, $j-$inci bileşenine *izdüşüm*ü denir. □

Önerme 2. *$G_1, \ldots, G_n$ gruplar ve $G = G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$ ise, her $j = 1, \ldots, n$ için G nin, $j-$inci bileşenine izdüşümü, π_j, bir örten grup homomorfizmidir. Ayrıca, her $j = 1, \ldots, n$ için bir grup homomorfizmi $f_j : G' \longrightarrow G_j$ verilmişse, öyle tek türlü belirli bir grup homomorfizmi $f : G' \longrightarrow G$ bulunur ki her $j = 1, \ldots, n$ için $\pi_j \circ f = f_j$ dir.*

Kanıt. Her $j = 1, \ldots, n$ için π_j nin bir örten homomorfizm olduğu, kanıt gerektirmeyecek kadar açıktır. Eğer her $j = 1, \ldots, n$ için $f_j : G' \longrightarrow G_j$ grup homomorfizmi verilmişse,

$$f : G' \longrightarrow G \quad , \quad f(x) = (f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots\ ,\ f_n(x))$$

ile tanımlanan f fonksiyonu bir homomorfizm olur ve her $j = 1, \ldots, n$ için $\pi_j \circ f = f_j$ dir. ∎

Dolaysız toplamların Önerme 2'de verilen özelliği, belirleyici bir özelliktir. Şöyle ki eğer G, $G_1, \ldots, G_n$ gruplar ise ve her $j = 1, \ldots, n$ için bir grup homomorfizmi $f_j : G' \longrightarrow G_j$ verildiğinde $\pi_j \circ f = f_j$, $1 \leq j \leq n$ olacak biçimde tek türlü belirli bir grup homomorfizmi $f : G' \longrightarrow G$ bulunabiliyorsa, bu takdirde, $G \cong G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$ dir.

Uyarı 2. İki grup arasında bir homomorfizmden söz ederken bu homomorfizmin her şeyden önce bir fonksiyon olması gerektiğini unutmayınız. Örneğin, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ bölüm grubundan, başka bir gruba bir homomorfizm, $f : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow G$, tanımlanırken her eşküme $n + 3\mathbb{Z}$ için $f(n + 3\mathbb{Z})$ yi n cinsinden tanımlamaya çalışmak doğaldır ve pek yaygındır. Ancak, bu durumda $f(n + 3\mathbb{Z})$ nin *temsilci seçiminden bağımsız* olarak tek türlü belirli olduğundan emin olmak gerekir. Başka bir deyişle, $n + 3\mathbb{Z} = k + 3\mathbb{Z}$ olunca $f(n + 3\mathbb{Z}) = f(k + 3\mathbb{Z})$ olmalıdır. □

Örnek 4. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ grubundan $\mathbb{Z}$ ye $f(n + 3\mathbb{Z}) = 3n$ ile bir homomorfizm tanımlanmaya çalışıldığını düşünelim. Burada

$$\begin{aligned} f((n+3\mathbb{Z}) + (m+3\mathbb{Z})) &= f((n+m)+3\mathbb{Z}) = 3(n+m) \\ &= 3n + 3m = f(n+3\mathbb{Z}) + f(m+3\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır; ancak, başlangıçta sözü edilen eşitlik, bir fonksiyon tanımlamaz; çünkü, $2+3\mathbb{Z} = 5+3\mathbb{Z}$ olduğu halde, $f(2+3\mathbb{Z}) = 3\cdot 2 = 6$ ve $f(5+3\mathbb{Z}) = 3\cdot 5 = 15$ olup $f(2+3\mathbb{Z}) \neq f(5+3\mathbb{Z})$ dir. □

Örnek 4'te olduğu gibi, verilen bir eşitlikle bir f fonksiyonu tanımlanmaya çalışılır ve f, fonksiyon olmazsa, f, *iyi tanımlı değil* denir. Bir f fonksiyonu tanımlanmaya çalışılırken f nin iyi tanımlı olduğundan emin olunmalıdır. Tanım bölgesinde $a = b$ ise, $f(a) = f(b)$ olmalıdır.

Örnek 5. G bir grup, $N \trianglelefteq G$ ise,

$$\delta_N : G \longrightarrow G/N \quad , \quad \delta_N(x) = xN$$

ile tanımlanan δ_N, bir örten grup homomorfizmidir. Gerçekten, δ_N iyi tanımlıdır ve $x,\ y \in G$ için $\delta_N(xy) = (xy)N = (xN)(yN) = \delta_N(x)\delta_N(y)$ dir. Ayrıca, δ_N nin örten olduğu ve *çek* $(\delta_N) = N$ olduğu açıktır. □

Tanım 4. Örnek 5'te tanımlanan δ_N ye G den G/N bölüm grubuna *doğal homomorfizm* denir. □

Kuşkusuz, G ve G' gibi iki grup için, G den G' ye grup homomorfizmi olmayan fonksiyonlar da vardır.

Örnek 6. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2+1$ ile tanımlanan f fonksiyonu işlem korumaz: $f(1+3) = f(4) = 17$; $f(1)\cdot f(3) = 2\cdot 10 = 20$. Bu nedenle, f, bir grup homomorfizmi değildir. □

Grup homomorfizmleri ile ilgili temel özellikleri bir teorem olarak ifade etmek istiyoruz. Bunun için aşağıdaki gösterimler çok yararlı olacaktır.

$\sigma : G \longrightarrow G'$ bir grup homomorfizmi, $H \subseteq G$ ve $K \subseteq G'$ olsun. Bu takdirde, $\sigma(H) = \{\sigma(a) : a \in H\}$, $\sigma^{-1}(K) = \{a \in G : \sigma(a) \in K\}$ olarak tanımlanır. $\sigma(H) \subseteq G'$ ve $\sigma^{-1}(K) \subseteq G$ olduğuna dikkat ediniz. $b \in G'$ için $\sigma^{-1}(\{b\})$ yerine $\sigma^{-1}(b)$ yazacağız. Böylece, *gör* $(\sigma) = \sigma(G)$ dir ve G' nün birim elemanı e' olmak üzere, *çek* $(\sigma) = \sigma^{-1}(e')$ dür.

Teorem 1. *$\sigma : G \longrightarrow G'$ bir grup homomorfizmi, $H \leq G$, $K \leq G'$; $e \in G$ ve $e' \in G'$ birim elemanlar, $x \in G$ olsun. Bu takdirde,*

(i) $\sigma(e) = e'$ dür.

(ii) Her $n \in \mathbb{Z}$ için $\sigma(x^n) = (\sigma(x))^n$ dir.

(iii) $\sigma(H) \leq G'$ ve $\sigma^{-1}(K) \leq G$ dir.

(iv) $H \trianglelefteq G$ ise, $\sigma(H) \trianglelefteq \sigma(G)$ dir.

(v) $K \trianglelefteq G'$ ise, $\sigma^{-1}(K) \trianglelefteq G$ dir.

(vi) çek (σ) $\trianglelefteq G$ dir.

(vii) $\sigma^{-1}(\sigma(x))$ ve çek (σ) nın kardinaliteleri eşittir.

($viii$) σ bire-birdir $\Longleftrightarrow$ çek (σ) $= \{e\}$ dir.

(ix) σ izomorfizmdir $\Longleftrightarrow$ $\sigma(G) = G'$ ve çek (σ) $= \{e\}$ dir.

(x) $|H| = m$ ise, $|\sigma(H)|$, m yi böler.

(xi) $|x| = n$ ise, $|\sigma(x)|$, n yi böler.

(xii) H devirli ise, $\sigma(H)$ de devirlidir.

($xiii$) H Abel grubu ise, $\sigma(H)$ de Abel grubudur.

Kanıt. Sadece (iv), (v) ve (vii) yi kanıtlayıp diğer şıkların kanıtını okuyucuya alıştırma olarak bırakıyoruz. Bu kanıtlar genelde çok kolaydır. Örneğin, (i) ve (ii) nin kanıtı izomorfizmlerle ilgili Teorem 9.3'te verilen kanıtın aynısıdır. $H \trianglelefteq G$ olsun. $\sigma(H) \leq \sigma(G)$ olduğunu görmek kolaydır. $x \in \sigma(G)$ ve $y \in \sigma(H)$ herhangi elemanlar ise, $\sigma(a) = x$ ve $\sigma(b) = y$ olacak biçimde $a \in G$ ve $b \in H$ vardır. $H \trianglelefteq G$ olduğundan, $aba^{-1} \in H$ dir. Bu nedenle, $xyx^{-1} = \sigma(a)\sigma(b)\sigma(a)^{-1} = \sigma(aba^{-1}) \in \sigma(H)$; böylece, her $x \in \sigma(G)$ için $x(\sigma(H))x^{-1} \subseteq \sigma(H)$ olduğu ve sonuç olarak, $\sigma(H) \trianglelefteq \sigma(G)$ olduğu görülür. Bu, (iv) yi kanıtlar. $K \trianglelefteq G'$ olsun. $\sigma^{-1}(K) \leq G$ olduğunu göstermek kolaydır. $g \in G$ ve $a \in \sigma^{-1}(K)$ ise, $\sigma(a) \in K$, $\sigma(g) \in G'$ dür. $K \trianglelefteq G'$ olduğundan, $\sigma(gag^{-1}) = \sigma(g)\sigma(a)\sigma(g^{-1}) \in K$; böylece, her $g \in G$ için $g(\sigma^{-1}(K))g^{-1} \subseteq \sigma^{-1}(K)$, yani $\sigma^{-1}(K) \trianglelefteq G$ olduğu görülür. Bu, (v) yi kanıtlar. (vii) nin kanıtı için, $f : \sigma^{-1}(\sigma(x)) \longrightarrow$*çek* ($\sigma$),

$z \longrightarrow f(z) = x^{-1}z$ fonksiyonunu düşünelim. Her $z \in \sigma^{-1}(\sigma(x))$ için $\sigma(z) = \sigma(x)$, $\sigma(x^{-1}z) = e'$ ve dolayısıyla, $f(z) = x^{-1}z \in$ *çek* (σ) dır. Diğer yandan, $f(z_1) = f(z_2) \Longleftrightarrow x^{-1}z_1 = x^{-1}z_2 \Longleftrightarrow z_1 = z_2$ olduğundan, f, iyi tanımlı ve bire-birdir. Her $a \in$ *çek* (σ) için $\sigma(a) = e'$, $\sigma(xa) = \sigma(x)$ olduğundan, $xa \in \sigma^{-1}(\sigma(x))$ ve dolayısıyla, $f(xa) = a$ dır. Bu, f nin örten olduğunu gösterir. O halde, $\sigma^{-1}(\sigma(x))$ ve *çek* (σ) nın kardinaliteleri eşittir. ∎

Uyarı 3. Teorem 1 in (xii) inci şıkkı, bir devirli grubun her homomorf görüntüsünün de yine bir devirli grup olduğunu ifade eder. Bu bağlamda, bir devirli gruptan herhangi bir gruba tanımlı bir grup homomorfizmi, o devirli grubun üreteci üzerindeki etkisiyle tamamen belirlenir. Gerçekten, $G = < x >$ bir devirli grup ve $\sigma : G \longrightarrow G'$ bir grup homomorfizmi ise, G nin her elemanı x^k, $k \in \mathbb{Z}$, biçiminde olduğundan ve $\sigma(x^k) = \sigma(x)^k$ olduğundan, σ yı bilmek için $\sigma(x)$ i bilmek yeterlidir. □

Örnek 7. $\mathbb{Z}_6$ dan $\mathbb{Z}_{15}$ e tüm grup homomorfizmlerini belirleyelim. Bu tür bir homomorfizm $\sigma : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}$, $\sigma(1) = a$ ile tamamen belirlenir. Lagrange Teoremi ve Teorem $1(xi)$ ye göre, a nın mertebesi hem 15 i hem de 6 yı, yani $(15, 6) = 3$ ü bölmelidir. Başka bir deyişle, $|a| = 1$ veya $|a| = 3$ olabilir. Bu özelliğe sahip elemanlar, 0, 5 ve 10 dur; ve bu elemanların her biri $\mathbb{Z}_6$ dan $\mathbb{Z}_{15}$ e bir homomorfizm verir. □

Örnek 8. $\mathbb{Z}_{12}$ den $\mathbb{Z}_6$ ya tüm örten homomorfizmleri bulalım. Önceki örnekte olduğu gibi, $\sigma : \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_6$, $\sigma(1) = a$ nın örten bir grup homomorfizmi olması için $|\sigma(1)| = 6$, yani $\sigma(1)$, $\mathbb{Z}_6$ nın bir üreteci olmalıdır. Dolayısıyla, $\sigma(1) = 1$ veya $\sigma(1) = 5$ olmalıdır. Bu değerlerden her biri $\mathbb{Z}_{12}$ den $\mathbb{Z}_6$ ya bir örten grup homomorfizmi verir. □

Grup homomorfizmleri ve bölüm grupları arasındaki ilişkiden daha önce de söz etmiş ve Örnek 5'te her bölüm grubu ile ilgili bir doğal homomorfizm bulunduğunu görmüştük. Bu bağlamda vereceğimiz aşağıdaki sonuç, *Homomorfizmlerin Temel Teoremi* olarak da isimlendirilir.

Teorem 2 (Birinci İzomorfizm Teoremi). $\sigma : G \longrightarrow G'$ *bir grup* *homomorfizmi ve çek* $(\sigma) = Ç$ *ise,* $\widetilde{\sigma} : G/Ç \longrightarrow \sigma(G)$, $\widetilde{\sigma}(xÇ) = \sigma(x)$ *ile tanımlanan dönüşüm, bir izomorfizmdir ve böylece,* $G/Ç \cong \sigma(G)$ *dir.*

Kanıt. Teorem $1(vi)$'de, $Ç \trianglelefteq G$ olduğu görüldüğünden, $G/Ç$ bölüm grubu tanımlıdır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} xÇ = yÇ &\Longrightarrow y^{-1}x \in Ç \Longrightarrow \sigma(y^{-1}x) = e' \\ &\Longrightarrow \sigma(x) = \sigma(y) \Longrightarrow \widetilde{\sigma}(xÇ) = \widetilde{\sigma}(yÇ) \end{aligned}$$

olduğundan, $\widetilde{\sigma}$ iyi tanımlıdır. Buna ek olarak; $x, y \in G$ için

$$\widetilde{\sigma}((xÇ)(yÇ)) = \widetilde{\sigma}((xy)Ç) = \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y) = \widetilde{\sigma}(xÇ)\widetilde{\sigma}(yÇ);$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma}(xÇ) = \widetilde{\sigma}(yÇ)) &\Longrightarrow \sigma(x) = \sigma(y) \Longrightarrow \sigma(x)^{-1}\sigma(y) = e' \\ &\Longrightarrow \sigma(x^{-1}y) = e' \Longrightarrow x^{-1}y \in Ç \Longrightarrow xÇ = yÇ \end{aligned}$$

dir. Bunlar, $\widetilde{\sigma}$ nın bire-bir bir homomorfizm olduğunu kanıtlar. $\widetilde{\sigma}$ nın örten olduğu açıktır. ■

Teorem 2'de verilen durum, genellikle aşağıdaki gibi bir çizelge üzerinde özetlenir:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\delta_{Ç}"'] & & \sigma(G) \\ & G/Ç \arrow[ur, "\widetilde{\sigma}"'] & \end{tikzcd}$$

Bu çizelgede $\widetilde{\sigma} \circ \delta_{Ç} = \sigma$ olduğundan, *çizelge komütatiftir* (veya *değişme özelliğine sahiptir*) denir.

Teorem 2 yi uygulayabileceğimiz standart örneklerden biri aşağıdadır:

Örnek 9. Örnek 3'te tanımlanan $(mod\ n)$ indirgeme homomorfizmi için, *çek* $(\sigma_n) = n\mathbb{Z}$ ve $\sigma_n(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_n$ olduğundan, Birinci İzomorfizm Teoremi'ne göre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$ olur. □

Bu bölümü gruplarla ilgili iki izomorfizm teoremiyle kapatacağız. G bir grup, $H \leq G$ ve $N \leq G$ ise, $H \cup N$ nin bir altgrup olması gerekmediğini biliyoruz. $H \cup N$ nin G içinde ürettiği altgrubu $H \vee N$ ile göstereceğiz. Önce, bu durumu içeren bir sonuç vereceğiz.

Önerme 3. *G bir grup, $H \leq G$ ve $N \trianglelefteq G$ ise, $H \vee N = HN = NH$ ve $H \cap N \trianglelefteq H$ dir. Eğer ek olarak, H de G nin normal altgrubu ise, $HN \trianglelefteq G$ dir.*

Kanıt. $HN \leq G$ olduğunu gösterirsek, $H \vee N = HN$ olduğu kanıtlanmış olur; çünkü, G nin $H \cup N$ yi kapsayan her altgrubu HN yi kapsar. $e = ee \in HN$ olduğu açıktır. Şimdi, $h, h_1 \in H$ ve $n, n_1 \in N$ alalım. Bu takdirde, $N \trianglelefteq G$ olduğundan, $h_1^{-1}nh_1,\ hn^{-1}h^{-1} \in N$ dir ve böylece,

$$(hn)(h_1n_1) = (hh_1)(h_1^{-1}nh_1n_1)\ ,\ (hn)^{-1} = n^{-1}h^{-1} = h^{-1}(hn^{-1}h^{-1})$$

ifadelerinden de görüldüğü üzere $(hn)(h_1n_1)$, $(hn)^{-1} \in HN$ dir. O halde, $HN \leq G$ ve sonuç olarak, $H \vee N = HN$ dir. Ayrıca, her $h \in H$ ve $n \in N$ için $hn = (hnh^{-1})h \in NH$ ve $nh = h(h^{-1}nh) \in HN$ olduğundan, $HN = NH$ dir. $H \cap N \trianglelefteq H$ olduğunu görmek için $h \in H$ ve $a \in H \cap N$ alalım. Bu takdirde, $H \leq G$ olduğundan, $hah^{-1} \in H$ ve $N \trianglelefteq G$ olduğundan, $hah^{-1} \in N$ dir. Dolayısıyla, $hah^{-1} \in H \cap N$ dir. Son olarak, $H \trianglelefteq G$ ve $N \trianglelefteq G$ ise, her $x \in G$, $h \in H$ ve $n \in N$ için

$$x(hn)x^{-1} = (xhx^{-1})(xnx^{-1}) \in HN$$

olur ki bu, $HN \trianglelefteq G$ olduğunu gösterir. ∎

Teorem 3 (İkinci İzomorfizm Teoremi). *G bir grup, $H \leq G$ ve $N \trianglelefteq G$ ise, $HN/N \cong H/H \cap N$ dir.*

Kanıt. Önerme 3 ten, $HN \leq G$ ve $H \cap N \trianglelefteq H$ dir. $N \trianglelefteq G$ olduğundan, $N \trianglelefteq HN$ dir. Şimdi, $h \in H$ ve $n \in N$ için $\sigma(hn) = h(H \cap N)$ ile tanımlanan $\sigma : HN \longrightarrow H/H \cap N$ fonksiyonunu ele alalım: $h, h_1 \in H$ ve $n, n_1 \in N$ için

$$\begin{aligned} hn = h_1n_1 &\Longrightarrow h_1^{-1}h = n_1n^{-1} \in H \cap N \\ &\Longrightarrow h(H \cap N) = h_1(H \cap N) \Longrightarrow \sigma(hn) = \sigma(h_1n_1) \end{aligned}$$

olduğundan, σ iyi tanımlıdır. Ayrıca, $h, h_1 \in H$ ve $n, n_1 \in N$ için

$$\begin{aligned}\sigma((hn)(h_1n_1)) &= \sigma((hh_1)(h_1^{-1}nh_1n_1)) = (hh_1)(H \cap N)\\ &= (h(H \cap N))(h_1(H \cap N)) = \sigma(hn)\sigma(h_1n_1)\end{aligned}$$

olduğundan, σ bir grup homomorfizmidir. σ nın örten olduğu açıktır ve *çek* $(\sigma) = N$ olduğu kolayca gösterilebilir. Birinci İzomorfizim Teoremi, $HN/N \cong H/H \cap N$ olduğunu gösterir. ■

Teorem 3'te, G bir toplamsal grup ise, HN yerine $H + N$ yazılır ve sözü edilen izomorfizm, $(H + N)/N \cong H/H \cap N$ biçimini alır.

Örnek 10. $G = \mathbb{Z}_{40}$, $H =< 4 >$, $N =< 10 >$ için $H+N =< 2 >$, $H \cap N =< 20 >$ ve

$$< 2 > / < 10 >= (H+N)/N \cong H/(H \cap N) =< 4 > / < 20 > \cong \mathbb{Z}_5$$

tir. □

Teorem 4 (Üçüncü İzomorfizm Teoremi). *G bir grup, $H \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G$ ve $K \leq H$ olsun. Bu takdirde, $K \trianglelefteq H$ ve $H/K \trianglelefteq G/K$ olur ve ayrıca, $(G/K)/(H/K) \cong G/H$ dir.*

Kanıt. Varsayımlar altında, $K \trianglelefteq H$ ve $H/K \trianglelefteq G/K$ olduğu aşikâr olduğundan; teoremde sözü edilen izomorfizmi kanıtlamamız yeterli olacaktır. Bunun için, $\sigma : G \longrightarrow (G/K)/(H/K)$, $\sigma(x) = (xK)(H/K)$ olarak tanımlansın. σ nın örten olduğu, ve $x, y \in G$ için

$$\begin{aligned}\sigma(xy) &= ((xy)K)(H/K) = ((xK)(yK))(H/K)\\ &= [(xK)(H/K)][(yK)(H/K)] = \sigma(x)\sigma(y)\end{aligned}$$

olduğu açıktır. Böylece, σ nın bir homomorfizm olduğu görülür. Ayrıca, *çek* $(\sigma) = H$ olduğunu görmek kolaydır. Birinci İzomorfizm Teoremi'nden, $G/H \cong (G/K)/(H/K)$ elde edilir. ■

Örnek 11. $G = \mathbb{Z}$, $H = 2\mathbb{Z}$, $K = 6\mathbb{Z}$ olsun. Bu takdirde, $G/H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $H/K = 2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $G/K = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $(G/K)/(H/K) \cong G/H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$ dir. □